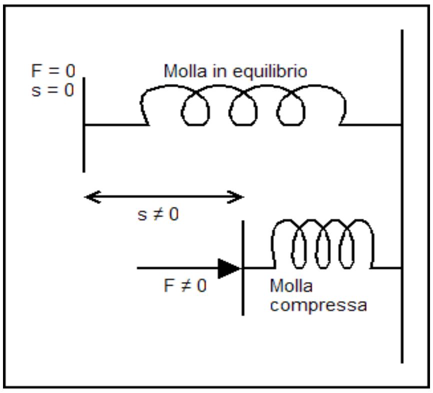
ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Danilo Saccoccioni

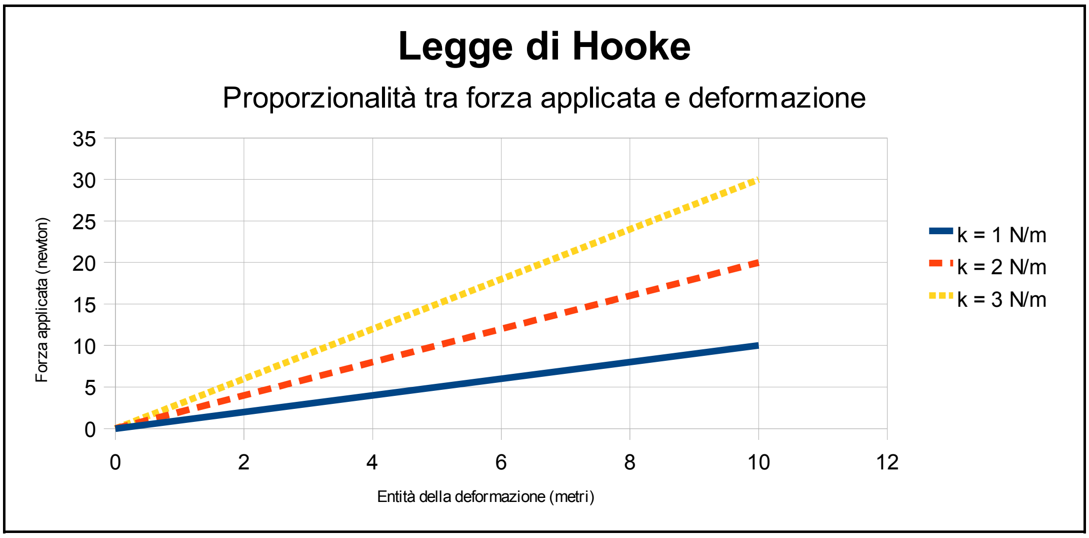
Quando si cerca di deformare un corpo solido, dapprima l'entità della deformazione è proporzionale alla forza applicata (comportamento che va sotto il nome di *legge di Hooke per corpi elastici*) e il corpo è in grado di ritornare alla forma originaria annullando tale forza, poi, se quest'ultima diventa troppo intensa, la deformazione assume un carattere permanente e il corpo non è più in grado di ritornare alla forma originaria (*snervamento*); infine, se la forza supera un certo limite, si può giungere alla rottura del corpo. In questa sede ci occupiamo solo del comportamento elastico lungo una certa direzione, modellabile attraverso una molla:



Facendo riferimento alla figura precedente, se la forza applicata ad una molla è nulla, la molla è in equilibrio e non è caratterizzata da alcuna deformazione geometrica. Applicando una forza $\vec{F}$ per comprimerla e misurando la deformazione $\vec{s}$, si può verificare la legge di Hooke: *la deformazione* $\vec{s}$ *è direttamente proporzionale alla forza applicata* $\vec{F}$:

$$\frac{F}{s} = costante \qquad \text{(usando i moduli di } \vec{F} \text{ ed } \vec{s} \text{)}$$

Ciò significa che, raddoppiando la forza, raddoppia la deformazione, triplicando la forza, triplica la deformazione ecc...
La costante che compare nella formula precedente viene di solito indicata con la lettera k e chiamata *costante elastica della molla*; la sua unità di misura è ovviamente N/m (newton al metro).
Rappresentando con un diagramma cartesiano la legge di Hooke relativa a tre molle di costante elastica diversa, si ottiene:

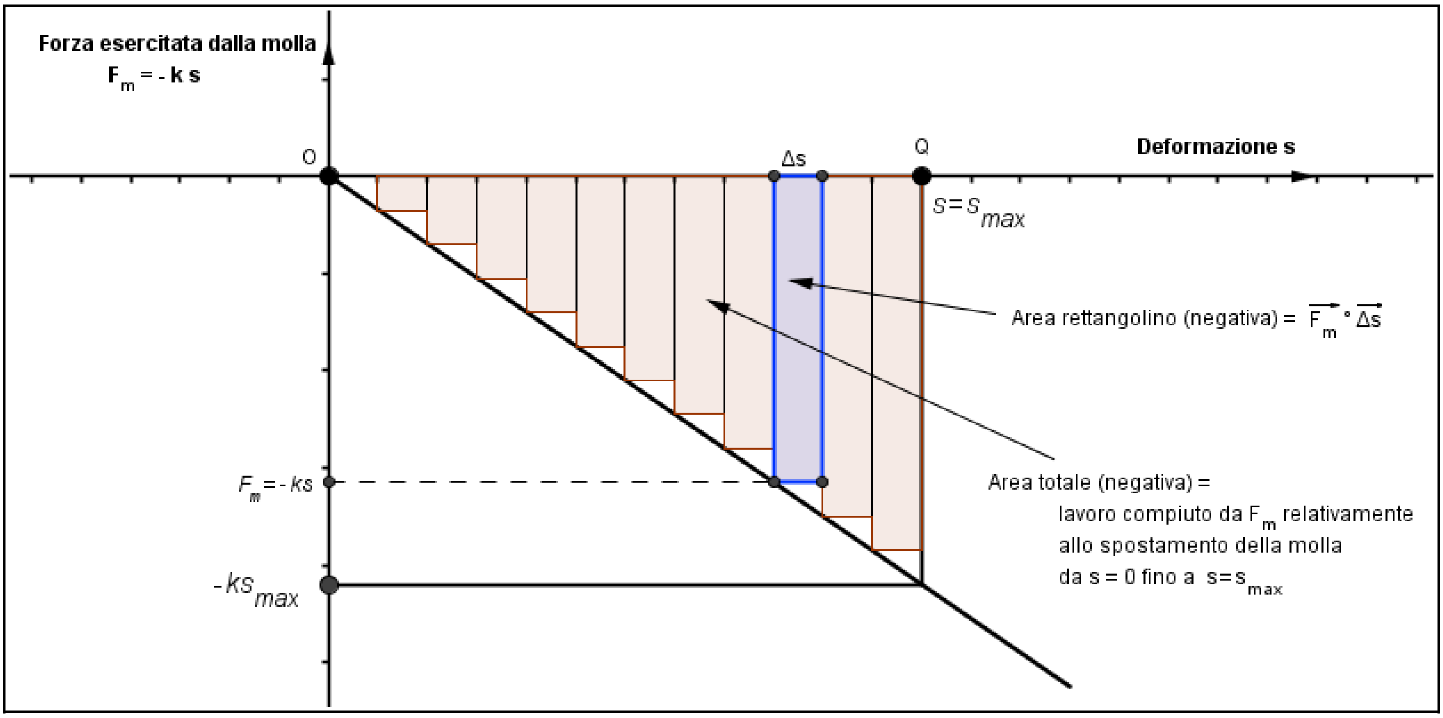


Ovviamente se la forza applicata ha verso opposto, la molla non si comprime, ma si allunga.

Consideriamo, ora, non la forza applicata, ma la forza che esercita la molla per effetto della deformazione: tale forza è uguale in modulo ed opposta in verso alla forza applicata e la indicheremo con $\vec{F}_m$, dove la m a pedice indica che si tratta della forza esercitata *non sulla* molla dall'esterno, ma *dalla* molla verso l'esterno. Visto il cambio di verso, la legge di Hooke conterrà ora un segno “meno”:

$$\frac{-F_m}{s} = k \quad , \qquad \text{cioè:} \qquad F_m = -k \cdot s$$

Vogliamo valutare il lavoro $L_{OQ}^{(F_m)}$ compiuto da $\vec{F}_m$ relativamente allo spostamento *OQ* dalla situazione in cui la molla non è deformata, $s=0$ (punto *O*), fino ad una deformazione $s=s_{max}$ (punto *Q*). Si tratta di un caso di spostamento rettilineo, ma *non* di forza costante: infatti la forza $\vec{F}_m$ varia con lo spostamento stesso, secondo il seguente grafico (identico alla figura precedente, ma invertito a causa del cambio di segno):



E' immediato rendersi conto che il lavoro $L_{OQ}^{(F_m)}$ va calcolato suddividendo il percorso in tanti trattini sufficientemente piccoli in modo tale che in ciascun trattino la forza si possa considerare costante; pertanto:

$$L_{OQ}^{(F_m)}=Somma(\vec{F}_m\cdot\vec{\Delta}s)=Somma(area\ rettangolino)=Area\,totale=\frac{1}{2}(-k\cdot s_{max})\cdot s_{max}=-\frac{1}{2}k\,s_{max}^2 \quad \text{(formula dell'area del triangolo)}$$

Si osserva subito che, una volta fissato il punto *O*, tale lavoro dipende esclusivamente dalla posizione del punto *Q*, cioè dall'entità della deformazione alla quale si arriva (s_{max}). Concludiamo che la forza è conservativa, poiché il lavoro calcolato non dipende dal tipo di moto per andare da *O* a *Q*, pertanto, come sappiamo, è possibile definire un'energia potenziale:

$$E_{PQ}=-L_{OQ}^{(F_m)}=\frac{1}{2}k\,s_{max}^2$$

La formula alla quale siamo giunti esprime l'energia potenziale elastica relativa al punto *Q* corrispondente ad una deformazione della molla di entità s_{max} . In generale, per il generico punto corrispondente ad una deformazione *s*, l'energia potenziale elastica vale (ovviamente il punto di riferimento O continua ad essere quello relativo ad una molla non deformata):

$$\boxed{E_{P.elastica}=\frac{1}{2}k\,s^2}$$

formula valida non solo per la compressione della molla, ma anche per l'allungamento.
La formula trovata è interessante poiché *l'energia potenziale accumulata da una molla dipende dal quadrato della deformazione*: quindi l'energia quadruplica se raddoppiamo la deformazione, diventa nove volte se triplichiamo la deformazione e così via. Osserviamo anche che l'energia potenziale è proporzionale a *k*.