Danilo Saccoccioni

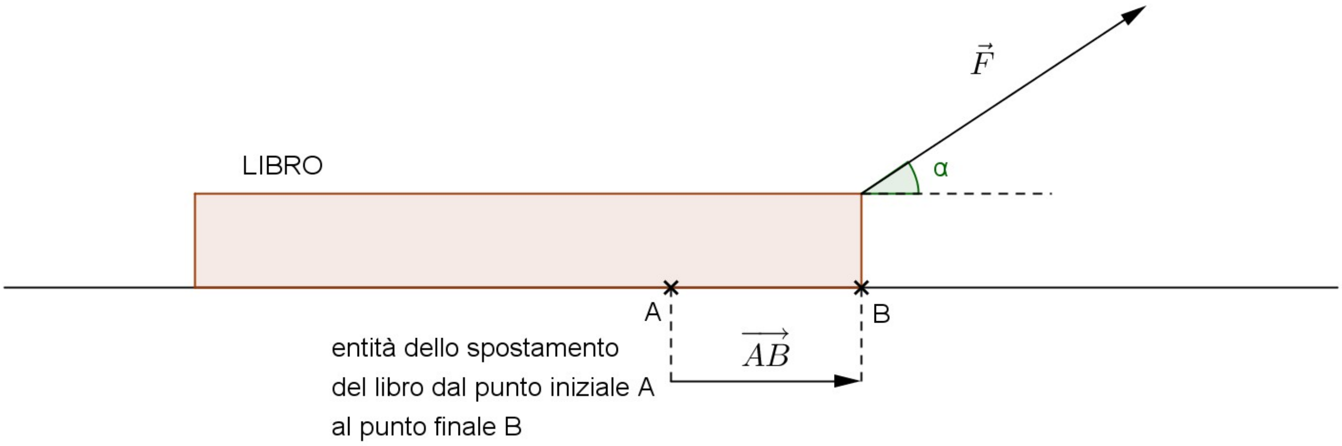
- LAVORO -
- ENERGIA MECCANICA -
- POTENZA -

Indice

LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA RELATIVO AD UNO SPOSTAMENTO

Comunemente l'idea intuitiva di lavoro è associata alla fatica o alla persistenza di uno sforzo del nostro corpo. Come per tutte le idee intuitive, sono necessarie varie precisazioni al fine di introdurre, a partire da essa, una definizione adeguata e non ambigua della grandezza fisica *lavoro*. L'intuito ci suggerisce subito che fatica e persistenza di sforzi corporei sono in qualche modo legati ad aspetti energetici (il termine "energia" viene dal greco ἐνέργεια, che significa *forza in atto*, *azione efficace*).

Consideriamo, ad esempio, un libro disposto orizzontalmente su un tavolo, sottoposto alla forza motrice $\vec{F}$ costante nel tempo:



Ovviamente sul libro agiranno, in generale, varie forze oltre ad $\vec{F}$, per esempio la forza peso e la reazione del piano. Concentriamoci però solo su $\vec{F}$: se essa ha intensità opportuna, l'estremo destro del libro si sposterà dal punto iniziale A al punto finale B, percorrendo un tratto rettilineo. Ricordiamo che, per il secondo principio della dinamica, il moto da A a B non è causato solo da $\vec{F}$, ma dalla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul corpo: $\vec{F}_{tot}=m\cdot\vec{a}$

Puntualizziamo subito che gli aspetti energetici legati all'azione di $\vec{F}$ rispetto allo spostamento $\overrightarrow{AB}$ sono intuitivamente legati:

- all'intensità della forza $\vec{F}$;
- all'entità dello spostamento $\overrightarrow{AB}$;
- all'angolo α.

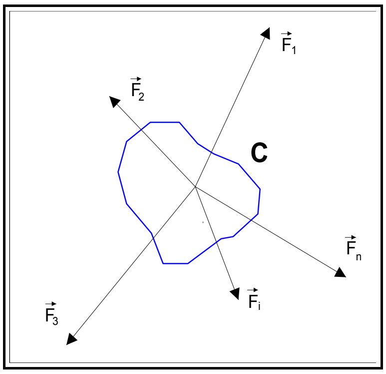
L'ultimo punto è giustificato dal fatto intuitivo che se la forza è parallela allo spostamento allora gli aspetti energetici suddetti andranno considerati massimi, mentre se la forza è perpendicolare allo spostamento essi andranno considerati nulli.

Sulla base di queste osservazioni del tutto intuitive, ci rendiamo conto che tali aspetti energetici possono essere convenientemente descritti dal prodotto scalare di $\vec{F}$ e $\overrightarrow{AB}$. Tale scelta infatti:

- tiene conto delle grandezze elencate nei tre punti precedenti;
- non dà più luogo ad ambiguità legate alla sola intuizione, ma introduce un'espressione analitica che si presta ad essere usata in una scienza quantitativa come la fisica; vedremo, inoltre, quanto sia "prolifica" tale scelta.
- nel caso di angolo α ottuso (ricordiamo che il libro è spinto da altre forze oltre ad $\vec{F}$) il prodotto scalare ha valore negativo: ciò può essere intuitivamente interpretato come un "assorbimento" di energia... ma approfondiremo.

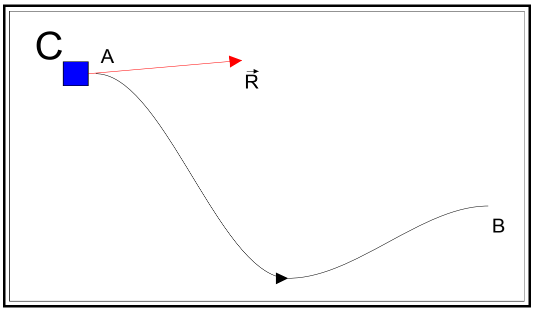
I ragionamenti fin qui condotti giustificano, dunque, le seguenti considerazioni (qui *ci limitiamo a corpi puntiformi*).

Si consideri un corpo puntiforme **C** sottoposto a *n* forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ che, nel caso generale, possono anche variare nel tempo:



Ovviamente la traiettoria descritta dal corpo dipenderà, istante per istante, dalla risultante $\vec{R}$:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n\,, \qquad \text{con} \qquad \vec{R}=m\cdot\vec{a}$$



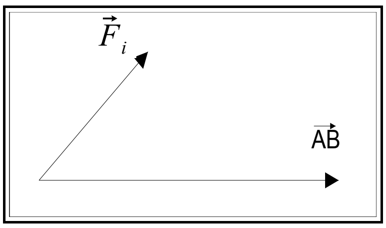
Fra tutte le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ che contribuiscono alla risultante, consideriamo la generica forza $\vec{F}_i$ e diamo la seguente definizione di lavoro, distinguendo due casi possibili:

Definizione di lavoro per corpi puntiformi

CASO 1 *Ipotesi: forza $\vec{F}_i$ costante nel tempo e spostamento rettilineo*

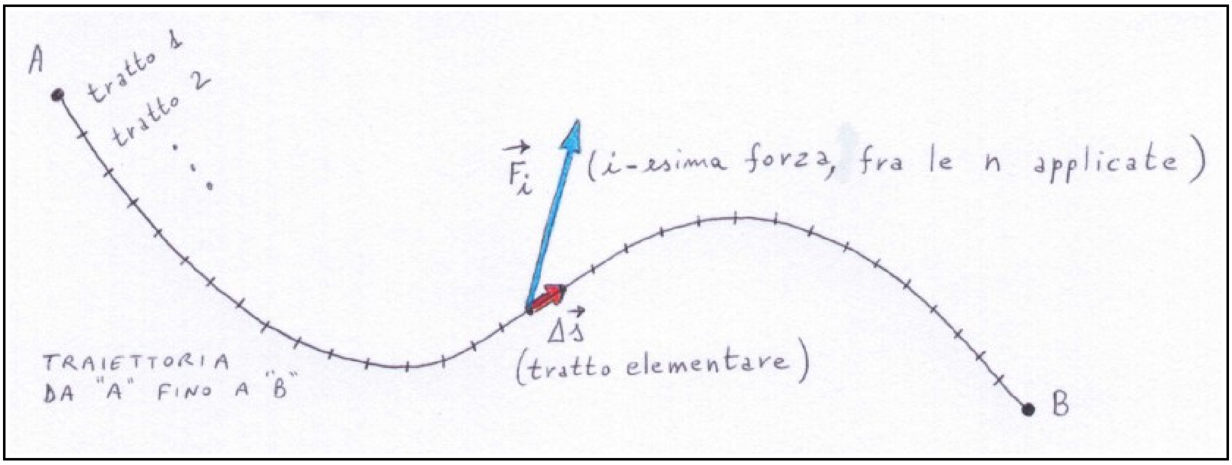
Se un corpo C compie uno *spostamento rettilineo* $\vec{AB}$ e se $\vec{F}_i$ è una *forza costante* ad esso applicata (tra le eventuali altre forze applicate), si definisce lavoro compiuto da $\vec{F}_i$ relativo allo spostamento AB il prodotto scalare di $\vec{F}_i$ e $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{W_{AB}^{(F_i)}=\vec{F}_i\cdot\overrightarrow{AB}}$$



CASO 2 *Caso generale (forza variabile nel tempo e/o spostamento non rettilineo)*

Dividiamo l'intero percorso AB (vedi figura seguente) in tanti tratti sufficientemente piccoli in modo tale che **in ciascun tratto** valgano approssimativamente le ipotesi del CASO 1, ovvero che i tratti $\overrightarrow{\Delta s}$ siano considerabili come rettilinei e che la forza $\vec{F}_i$ sia costante nel tempo (nel breve tratto):



Sotto tali ipotesi, definiamo il lavoro compiuto da $\vec{F}_i$ relativo allo spostamento AB la somma dei prodotti scalari di $\vec{F}_i$ e $\overrightarrow{\Delta s}$ su tutto il percorso AB:

$\boxed{W_{AB}^{(F_i)} = Somma(\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s})}$ che si scrive simbolicamente come: $\boxed{W_{AB}^{(F_i)} = \sum_{AB}(\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s})}$

Precisazione: la formula appena scritta (che è solo una definizione e non un teorema) va così interpretata:

$$W_{AB}^{(F_i)} = \sum_{AB}(\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s}) = (\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s})_{tratto\,1} + (\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s})_{tratto\,2} + (\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s})_{tratto\,3} + \ldots$$

Un lavoro di segno positivo si dice *lavoro motore*, un lavoro di segno negativo si dice *lavoro resistente*.
Le dimensioni fisiche del lavoro sono: $[L]=[M]\cdot[L^2]\cdot[T^{-2}]$
Il lavoro si misura in **joule** [J] nel S.I.: 1 J = 1 N m

LAVORO ED ENERGIA CINETICA

Dato un corpo di massa *m* che si muove con velocità istantanea $\vec{v}$ (che in generale dipenderà dal tempo), si definisce *energia cinetica* posseduta dal corpo la quantità:

$\boxed{K=\frac{1}{2}mv^2}$ *K* si misura in **joule**, proprio come il lavoro (perché?).

Diamo ora l'enunciato di un importantissimo teorema (si tenga presente la precedente figura):

Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

Il lavoro compiuto dalla risultante $\vec{R}$ di un sistema di forze applicate a un corpo, relativamente allo spostamento AB subito dal corpo stesso, è pari alla variazione di energia cinetica del corpo tra i due estremi A e B:

$\boxed{W_{AB}^{(R)}=\Delta K=K_B-K_A}$,

essendo K_A e K_B le energie cinetiche possedute dal corpo rispettivamente nei punti A e B.

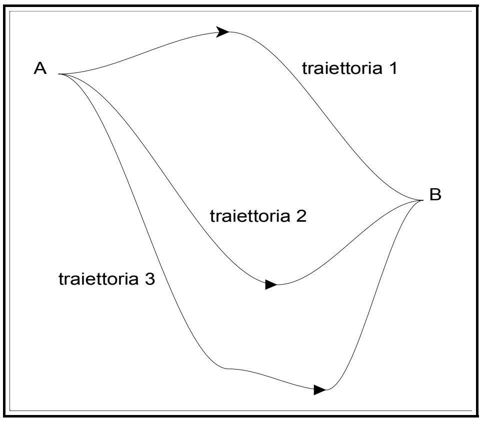
DIMOSTRAZIONE (*Vedi appendice a pag. 8*)

ENERGIA POTENZIALE

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica introdotto nel paragrafo precedente permette di ricavare un risultato fondamentale della Meccanica, che poi sarà esteso a tutti i processi fisici: la conservazione dell'energia. Vediamo come va impostato il discorso.

Diamo innanzitutto la seguente fondamentale definizione:

> Una forza $\vec{F}_i$ si dice ***conservativa*** se il lavoro da essa compiuto relativamente ad un dato spostamento AB *non dipende* dal particolare percorso, ma *solo* dalla posizione dei punti iniziale A e finale B.



Per esempio, nella situazione mostrata in figura, se $\vec{F}_i$ è conservativa si avrà:

$$W_{AB,1}^{(F_i)} = W_{AB,2}^{(F_i)} = W_{AB,3}^{(F_i)} ,$$

a prescindere dalla scelta del percorso, essendo $W_{AB,1}^{(F_i)}$, $W_{AB,2}^{(F_i)}$ e $W_{AB,3}^{(F_i)}$ i lavori compiuti da $\vec{F}_i$ relativamente ai tre diversi percorsi.

Data, dunque, una forza conservativa, il lavoro da essa compiuto relativamente ad uno spostamento AB non dipende dal particolare percorso per andare da A a B, ma solo dai due estremi in questione.

Esempi di *forze conservative* sono

- la forza gravitazionale;
- la forza elastica;
- la forza elettrostatica.

Esempi di *forze non conservative* sono

- la forza di attrito (perché?);
- le forze motrici (per esempio quelle esercitate da un motore sull'automobile o dalla mano sulla penna per scrivere).

Osserviamo subito che se il tratto AB viene percorso dal corpo in verso opposto, allora ovviamente (perché?) il lavoro compiuto dalla medesima $\vec{F}_i$ nel percorso BA è opposto al lavoro compiuto da $\vec{F}_i$ relativo ad AB:

$$W_{BA}^{(F_i)} = -W_{AB}^{(F_i)}$$

> Questo fatto comporta, chiaramente, che il lavoro compiuto da una forza conservativa su una qualsiasi traiettoria chiusa sia sempre zero:
>
> $$\boxed{W_{perc.\ chiuso}^{(F_i)} = 0}$$

Diamo la seguente fondamentale definizione:

> Data una forza $\vec{F}_i$ *conservativa* e fissato in modo del tutto arbitrario un punto O nello spazio, che chiameremo *punto di riferimento*, si chiama **energia potenziale del corpo nel punto P** dello spazio il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}_i$ relativo allo spostamento da P a O:
>
> $$U_P = W_{PO}^{(F_i)}$$

L'energia potenziale *è una funzione* molto importante: essa ha come dominio l'insieme dei punti dello spazio e come insieme di arrivo i numeri reali.
E' immediato dimostrare che il lavoro di una forza conservativa su un qualsiasi percorso da A a B può essere espresso come differenza dei valori che l'energia potenziale assume nei due punti estremi:

$$\boxed{W_{AB}^{(F_i)} = U_A - U_B = -\Delta U}$$

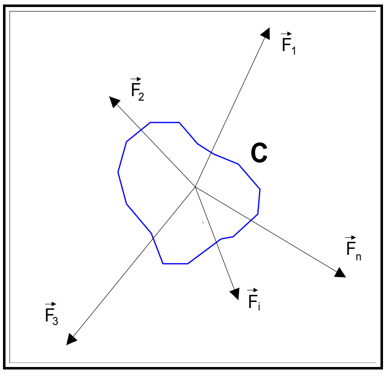
La dimostrazione si ottiene subito scegliendo un percorso da A a B che passi per il punto O (si lasciano i dettagli per esercizio).

Precisazioni molto importanti:

- L'energia potenziale si misura in **joule** (perché?).
- E' possibile definire una funzione energia potenziale solo per forze conservative.
- E' possibile definire una funzione energia potenziale per ogni forza conservativa che agisce sul corpo; ovviamente l'energia potenziale totale (associata alla risultante delle sole forze conservative) sarà la somma delle energie potenziali associate a ciascuna forza.
- La scelta del punto di riferimento O è del tutto arbitraria: infatti ciò che veramente interessa nelle applicazioni è la differenza $U_A - U_B$ (che è il lavoro da A a B), il cui valore non cambia se scegliamo un altro punto di riferimento.

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Se ora torniamo alla figura seguente:



possiamo immaginare che, di tutte le forze, alcune siano conservative e altre no. Dunque il lavoro compiuto dalla risultante di $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ si potrà esprimere come:

$$W_{AB}^{(R)} = W_{AB}^{(cons)} + W_{AB}^{(non\,cons)},$$

dove $W_{AB}^{(cons)}$ e $W_{AB}^{(non\,cons)}$ sono rispettivamente i lavori compiuti dalle forze conservative e dalle forze non conservative.
Inserendo, ora, la formula precedente nell'espressione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica, abbiamo:

$$W_{AB}^{(R)} = K_B - K_A \quad \Longrightarrow \quad W_{AB}^{(cons)} + W_{AB}^{(non\,cons)} = K_B - K_A$$

cioè, sostituendo al posto di $W_{AB}^{(cons)}$ la differenza dell'energia potenziale tra A e B:

$$W_{AB}^{(cons)} + W_{AB}^{(non\,cons)} = K_B - K_A \quad \Longrightarrow \quad U_A - U_B + W_{AB}^{(non\,cons)} = K_B - K_A$$

che, riordinata, fornisce il fondamentale risultato:

$$\boxed{W_{AB}^{(non\,cons)} + U_A + K_A = U_B + K_B}$$

Se chiamiamo *energia meccanica* posseduta dal corpo in una certa posizione P la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica (cioè $E_P = U_P + K_P$), possiamo scrivere la precedente formula in questo modo:

$$W_{AB}^{(non\,cons)} + E_A = E_B$$

ovvero:

> *Il lavoro compiuto su un corpo puntiforme da tutte le forze non conservative relativamente allo spostamento AB è pari alla variazione di energia meccanica subita dal corpo stesso*:
>
> $$\boxed{W_{AB}^{(non\,cons)} = E_B - E_A}$$

Per esempio, se su un corpo agiscono forze d'attrito (freni), l'energia meccanica totale diminuirà; se invece agiscono forze motrici aumenterà. Cosa succede se agiscono solo forze conservative, oppure se le forze non conservative compiono lavoro nullo?

La risposta si ricava immediatamente dal precedente risultato:

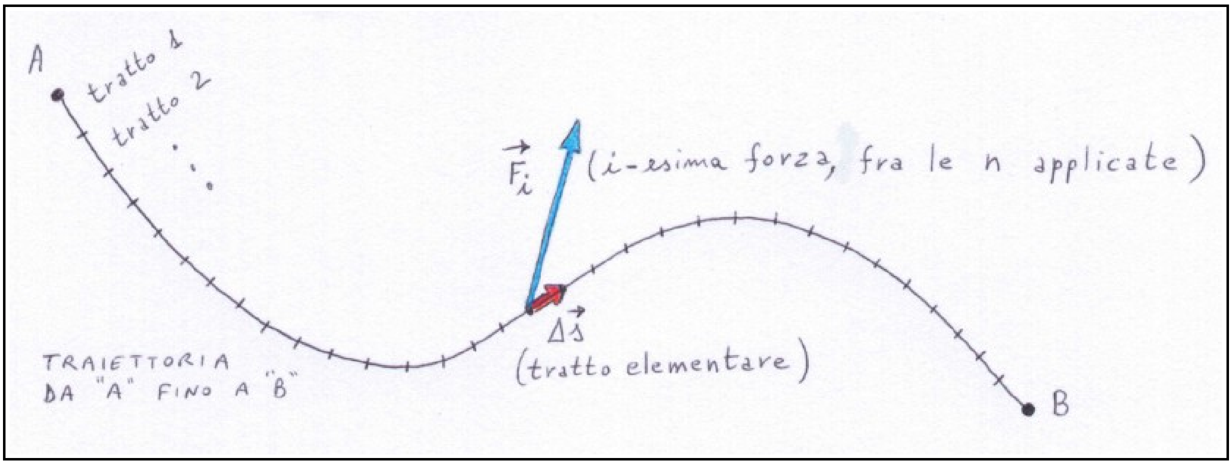
Teorema di conservazione dell'energia meccanica

> *Se su un corpo agiscono solo forze conservative* (*oppure se le forze non conservative agiscono compiendo però lavoro nullo*), *allora l'energia meccanica totale del corpo relativamente a qualunque spostamento si conserverà*:
>
> $$\boxed{E_A = E_B}$$

Noi abbiamo ricavato il precedente risultato come teorema, poiché l'abbiamo dimostrato. In realtà esso è espressione di un principio molto più generale (***principio di conservazione dell'energia***), qualora considerassimo, oltre all'energia meccanica, altre forme di energia (termica, nucleare ecc...); la termodinamica offrirà l'occasione di approfondire tali questioni.

POTENZA

Consideriamo di nuovo la situazione descritta dalla figura seguente (nelle ipotesi già precisate):



Si definisce *potenza* sviluppata (o erogata) in un certo istante dalla forza $\vec{F}_i$ la *rapidità* del lavoro compiuto da $\vec{F}_i$ relativamente allo spostamento $\overrightarrow{\Delta s}$ (sufficientemente piccolo, in modo che valgano le ipotesi del CASO 1), cioè il rapporto fra il lavoro compiuto e il tempo necessario a compierlo. In formule:

$$\boxed{P^{(F_i)} = \frac{W_{\Delta s}^{(F_i)}}{\Delta t}}$$

In pratica la potenza è numericamente uguale al lavoro compiuto nell'unità di tempo.

Se la potenza è una quantità positiva, si parla di *potenza sviluppata* o *erogata* dalla forza; se è negativa, si parla di *potenza assorbita*.

Le dimensioni della potenza sono: $[P] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$

L'unità di misura nel S.I. è il watt, con simbolo W. Sviluppare una potenza di 1 W significa compiere il lavoro di 1 J in 1 s.

Per la potenza vengono spesso utilizzate altre unità pratiche non appartenenti al S.I., ad esempio il *cavallo-vapore* (simbolo CV): 1 CV ≈ 735,5 W

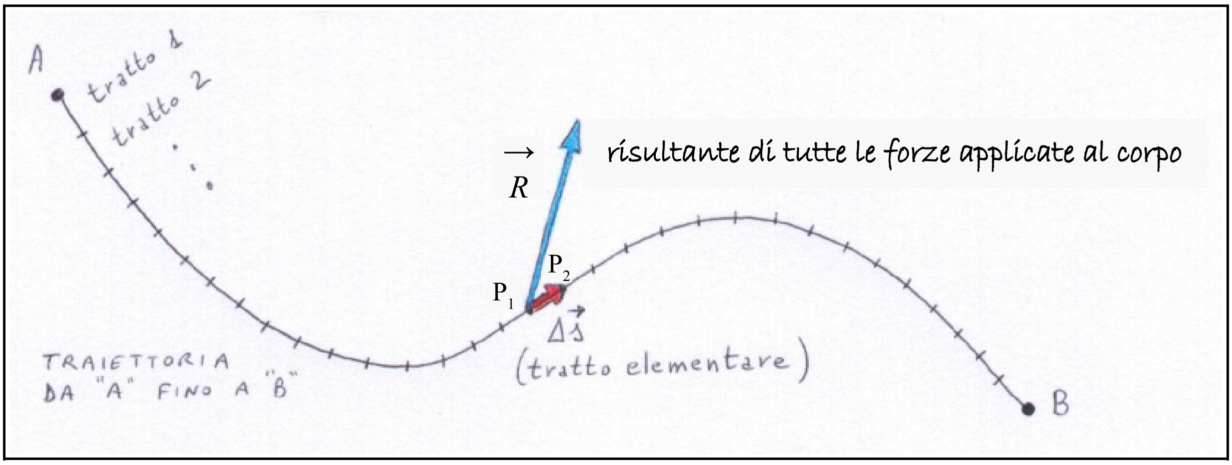
E' immediato ricavare un'utilissima formula:

$$P^{(F_i)} = \frac{W_{\Delta s}^{(F_i)}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}$$

cioè la potenza in un certo istante può essere valutata anche come prodotto scalare della forza per la velocità istantanea del corpo.

APPENDICE

Dimostrazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica



Facendo riferimento alla precedente figura, sappiamo che:

$$W_{AB}^{(R)} = \sum_{AB} (\vec{R} \cdot \vec{\Delta s})$$

Valutiamo, ora, il valore del prodotto $\vec{R} \cdot \vec{\Delta s}$, che risulta essere il lavoro compiuto dalla risultante nel generico trattino $\vec{\Delta s}$ del percorso.
Siano P_1 e P_2 gli estremi del trattino $\vec{\Delta s}$, m la massa del corpo, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità del corpo rispettivamente in P_1 e P_2. Ovviamente la velocità media $\vec{v}$ del corpo nel trattino $\vec{\Delta s}$ sarà:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2}$$

Per le ipotesi fatte, nel tratto $\vec{\Delta s}$ (che è piccolo) la velocità non varierà molto, pertanto possiamo assumere che essa sia costante e pari al valore medio $\vec{v} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2}$; dalla legge oraria del moto uniforme sappiamo che:

$$\vec{\Delta s} = \vec{v} \Delta t = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2} \Delta t$$

Inoltre, per il secondo principio della dinamica, avremo: $\vec{R} = m\vec{a} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$

Usando pertanto le ultime due formule, possiamo finalmente valutare il lavoro relativo al tratto $\vec{\Delta s}$:

$$\vec{R} \cdot \vec{\Delta s} = m\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \cdot \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2} \Delta t = \frac{1}{2} m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_1) = \frac{1}{2} m(\vec{v}_2^{\,2} - \vec{v}_1^{\,2}) = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

cioè: $\vec{R} \cdot \vec{\Delta s} = K_2 - K_1 = \Delta K_{12}$,

ovvero il lavoro compiuto dalla risultante $\vec{R}$ nel trattino $\vec{\Delta s}$ è pari alla variazione di energia cinetica del corpo tra i punti estremi del trattino; da quest'ultima osservazione ricaviamo immediatamente, sommando i singoli contributi, che il lavoro totale compiuto dalla risultante $\vec{R}$ in tutto il percorso AB è pari alla somma delle variazioni di energia cinetica nei singoli trattini, ovvero alla variazione totale tra A e B:

$$W_{AB}^{(R)} = \sum_{AB} (\vec{R} \cdot \vec{\Delta s}) = K_B - K_A$$