IL PIANO INCLINATO

(Prof. Danilo Saccoccioni)

Si consideri un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme su un piano inclinato senza attrito lungo L e alto h; si vuole determinare la relazione che sussiste tra le forze che agiscono sull'oggetto **per mantenerlo in moto uniforme**. Chiamiamo $\vec{P}$ la forza-peso dell'oggetto (espressa ovviamente in newton); oltre a $\vec{P}$, sull'oggetto devono necessariamente agire altre due forze:

- una resistenza $\vec{R}$, ovvero la forza di reazione del piano sull'oggetto (simile a quella che una sedia esercita sul nostro corpo quando siamo seduti); $\vec{R}$ dovrà necessariamente essere **perpendicolare al piano inclinato**, poiché quest'ultimo è supposto senza attrito (infatti l'attrito agirebbe parallelamente al piano, poiché è una forza che tende sempre ad opporsi al moto);
- una forza $\vec{F}_m$ **parallela al piano**, che è *motrice* se l'oggetto sale lungo il piano inclinato (per esempio la forza che esercita il motore dell'automobile parallelamente al moto), oppure è *frenante* se l'oggetto scende. Si badi bene che $\vec{F}_m$ è necessaria per mantenere il corpo in moto uniforme, cioè a velocità costante, altrimenti, se essa non ci fosse, il corpo comincerebbe ad accelerare scendendo spontaneamente verso il basso per la gravità.

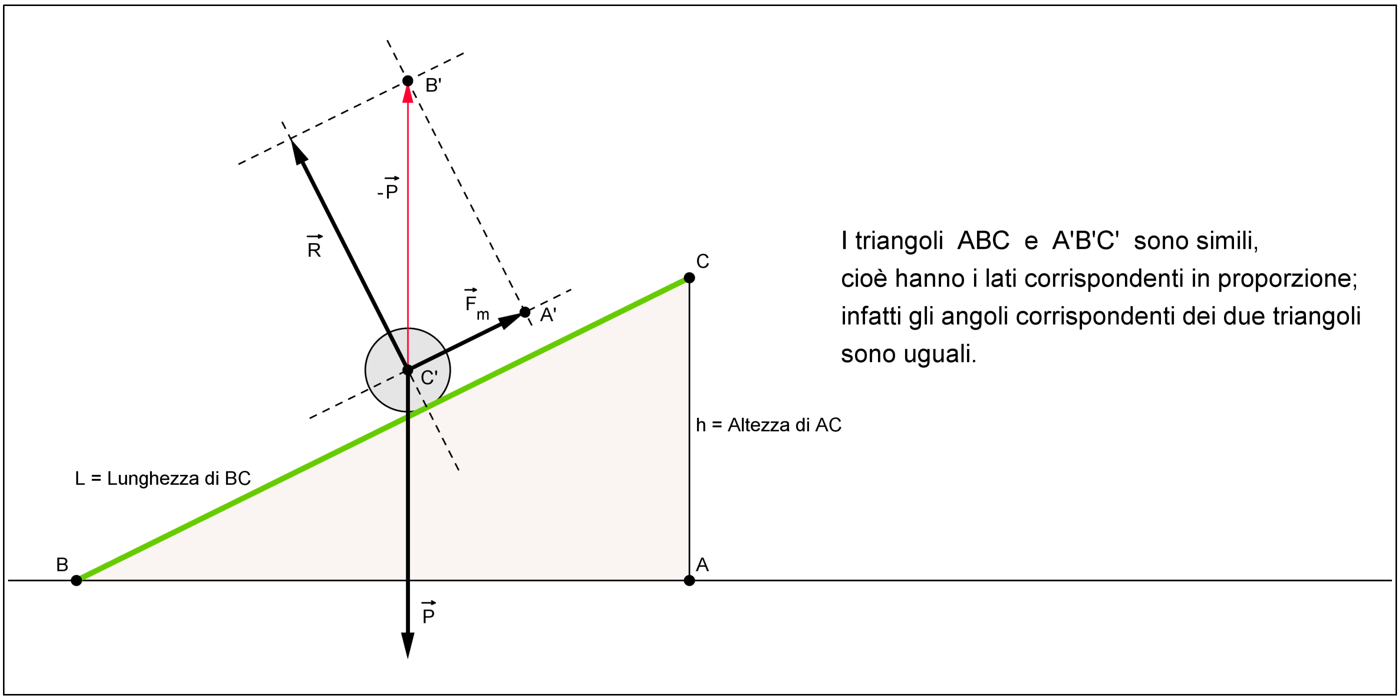
Sappiamo che il movimento del corpo è descritto dalla seconda legge della dinamica: $\vec{F}_{TOT}=m\cdot\vec{a}$, dove $\vec{F}_{TOT}$ è uguale alla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sull'oggetto. In base a quanto osservato in precedenza, possiamo scrivere:

$$\vec{F}_{TOT}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_m \quad .$$

Sappiamo, inoltre, che in un moto rettilineo uniforme la velocità è costante, dunque l'accelerazione è nulla, cioè vale zero; pertanto il secondo principio della dinamica porge:

$$\vec{F}_{TOT}=m\cdot\vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_m=0$$

Nella relazione precedente le incognite sono $\vec{R}$ e $\vec{F}_m$; trasportando $\vec{P}$ all'altro membro, abbiamo: $\vec{R}+\vec{F}_m=-\vec{P}$; ciò significa che dobbiamo determinare due vettori, $\vec{R}$ e $\vec{F}_m$, di somma nota (sappiamo qual è il vettore $-\vec{P}$: è semplicemente l'opposto di $\vec{P}$) e di direzioni assegnate (infatti, come abbiamo visto, $\vec{R}$ è perpendicolare al piano ed $\vec{F}_m$ è parallela ad esso). Questo significa, allora, che $\vec{R}$ e $\vec{F}_m$ si trovano graficamente attraverso la scomposizione del vettore $-\vec{P}$ lungo le direzioni perpendicolare e parallela al piano, come mostra la seguente figura riassuntiva:



E' facile rendersi conto che i triangoli ABC e A'B'C' in figura sono simili, ovvero che hanno i lati in proporzione, infatti gli angoli corrispondenti dei due triangoli sono uguali.[1] Se ora scriviamo la proporzione tra cateto e ipotenusa dei triangoli, otteniamo la relazione cercata:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \quad \rightarrow \quad \frac{h}{L}=\frac{F_m}{P} \quad \rightarrow \quad \boxed{F_m=\frac{h}{L}P} \quad .$$

Il modulo di $\vec{R}$, invece, si può trovare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo A'B'C': $R=\sqrt{P^2-F_m^2}$.

1 Si ricordi un importante teorema di geometria: *due triangoli che hanno gli angoli corrispondenti uguali sono simili, ovvero hanno i lati corrispondenti in proporzione.*

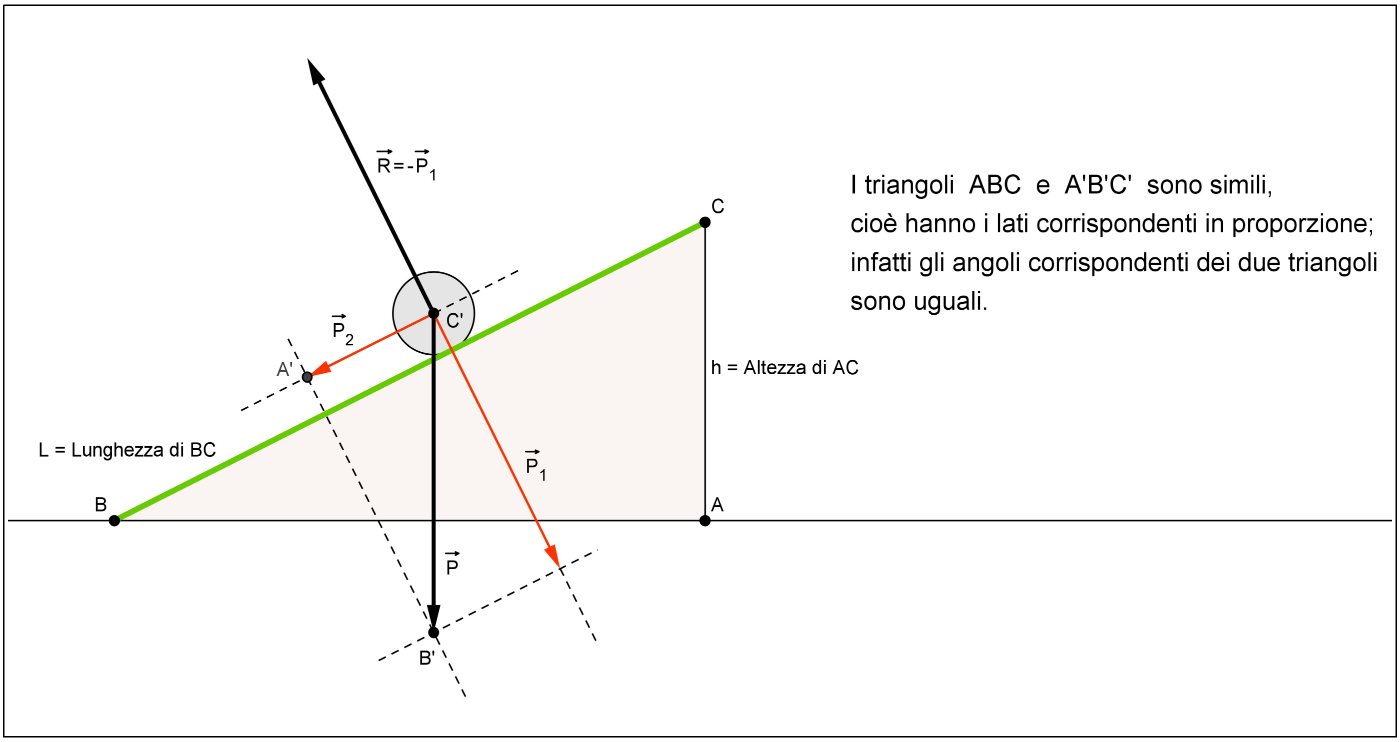
Esempio numerico

Un automobile percorre di moto rettilineo uniforme un tratto in salita con una pendenza del 10% (ciò significa che il rapporto $\frac{h}{L}$ *è uguale al* $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}10$ *); se il peso dell'automobile è di 5000 N, quanto vale la forza che deve esercitare il motore dell'automobile per salire? Quanto vale la resistenza che la strada esercita perpendicolarmente al piano inclinato?*

Basta applicare le formule ricavate: $F_m = \frac{h}{L} P = 0{,}10 \cdot 5000\,N = 500\,N$

$R = \sqrt{P^2 - F_m^2} = \sqrt{5000^2 - 500^2}\,N = 4975\,N$ (se approssimato a due cifre fornisce 5000 N)

Quando la forza motrice (o la forza frenante) viene annullata, il corpo scivola verso il basso senza attrito aumentando progressivamente la propria velocità; ci si può chiedere quanto valga l'accelerazione lungo il piano inclinato in questa situazione. Per risolvere il problema, osserviamo che ora agiscono sul corpo solo due forze: la forza-peso $\vec{P}$, che è sempre la stessa, e una reazione $\vec{R}$ esercitata dal piano e ad esso perpendicolare per mancanza di attrito. Pertanto, poiché l'accelerazione $\vec{a}$ del corpo che scivola deve soddisfare il principio di Newton $\vec{F}_{TOT} = m \cdot \vec{a}$, abbiamo $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$; se riusciremo a calcolare $\vec{P} + \vec{R}$, potremo ottenere, poi, l'accelerazione $\vec{a}$. In problemi come questo, conviene scomporre le forze in gioco secondo le direzioni tipiche della particolare geometria; la figura seguente mostra l'utilità di scomporre la forza-peso secondo le direzioni parallela e perpendicolare al piano inclinato:



Ovviamente $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. Poiché il moto avviene solo parallelamente al piano, la reazione $\vec{R}$ dovrà essere l'opposto del vettore $\vec{P}_1$, dunque:

$$\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{P}_2 = m \cdot \vec{a}$$

Per calcolare, ora, il modulo di $\vec{P}_2$, impostiamo la proporzione tra cateto e ipotenusa dei triangoli ABC e A'B'C':

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \quad \rightarrow \quad \frac{h}{L} = \frac{P_2}{P} \quad \rightarrow \quad \boxed{P_2 = \frac{h}{L} P} \; .$$

Dunque, dalle formule precedenti, ricordando anche che $P = m \cdot g$, dove g è l'accelerazione di gravità:

$$P_2 = m \cdot a \quad \rightarrow \quad m \cdot a = \frac{h}{L} P \quad \rightarrow \quad m \cdot a = \frac{h}{L} m \cdot g \quad ;$$

dividendo entrambi i membri per la massa m, si ottiene la relazione cercata $\boxed{a = \frac{h}{L} g}$,

che tanta importanza ha avuto, al tempo di Galileo, per le misure dell'accelerazione di gravità g.