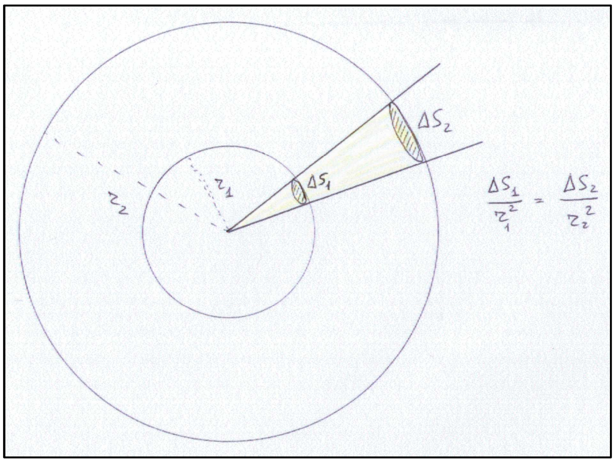
IL TEOREMA DI GAUSS

> Il flusso Φ_S del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S è uguale al rapporto fra la somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie e la costante dielettrica del mezzo in cui si trovano le cariche. Nel vuoto:
> $$\Phi_S = \frac{Somma(Q)}{\varepsilon_0} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$$

Premesse geometriche alla dimostrazione del teorema:

1. Una superficie sferica di raggio r ha area $S = 4\pi r^2$.

2. Si considerino due superfici sferiche concentriche di raggio r_1 e r_2 e un cono, con vertice nel centro, che sottende due tratti di superficie ΔS_1 e ΔS_2.
   E' noto dalla geometria che *le aree delle superfici sono direttamente proporzionali al quadrato dei rispettivi raggi*, sicché possiamo scrivere: $$\frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2}$$



DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS

La dimostrazione può essere condotta distinguendo tre casi:

CASO N° 1 (il più semplice): <u>*la superficie* ***S è sferica*** *ed è presente* ***un'unica carica puntiforme Q al centro*** *della sfera*</u>.

Possiamo suddividere la superficie sferica S in tanti tratti ΔS e applicare la definizione di flusso:

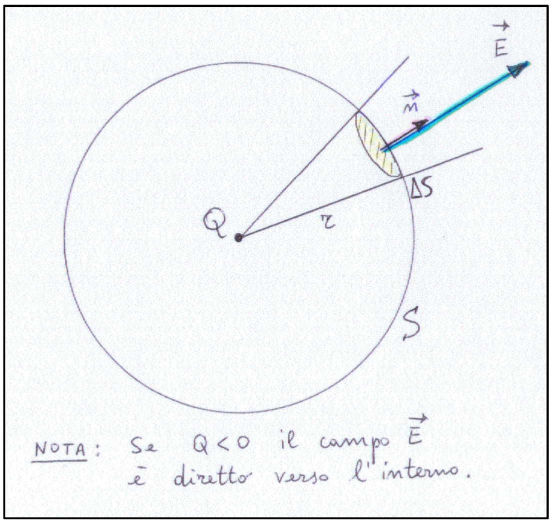
$$\Phi_S = Somma\left(\vec{E} \cdot \vec{n}\, \Delta S\right) = Somma\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\Delta S\right)$$

Infatti $\vec{E}$ ed $\vec{n}$ sono paralleli; inoltre in questo caso conviene prendere Q con il segno (senza modulo), perché ciò rende conto del verso reale del campo elettrico (l'angolo con $\vec{n}$ può essere 0 o 180°).
Le quantità Q, r^2 ed ε_0 possono essere portate fuori della somma (è un raccoglimento a fattor comune), perché non dipendono dal tratto ΔS scelto, pertanto:

$$\Phi_S = Somma\left(\vec{E} \cdot \vec{n}\, \Delta S\right) = Somma\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\Delta S\right) =$$

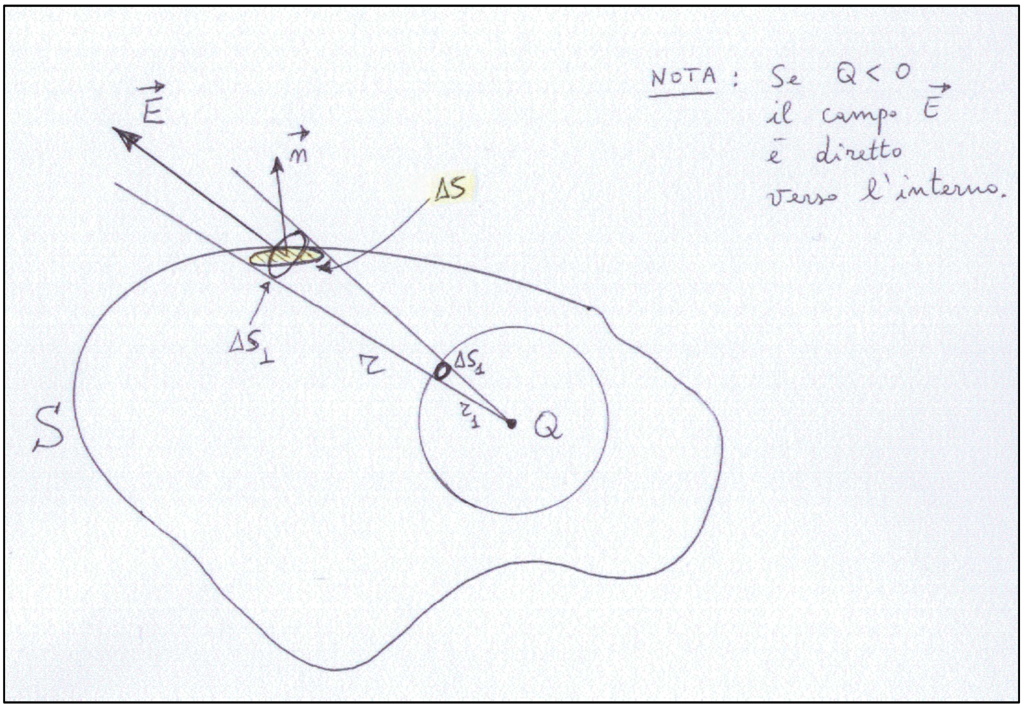
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot Somma\left(\Delta S\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Dunque nel caso 1 il teorema è dimostrato.



CASO N° 2 : *la superficie* ***S non è sferica*** *e all'interno è presente* ***un'unica carica puntiforme Q*** *in una posizione qualsiasi.*

Oltre ad S possiamo costruire una superficie sferica di raggio r_1 e anche in questo caso suddividere le due superfici in tante parti, come mostra la figura:



Applichiamo la definizione di flusso e svolgiamo i calcoli, tenendo presente che il prodotto scalare costringe a considerare la componente perpendicolare al campo elettrico del tratto ΔS , cioè $\Delta S_\perp$:

$$\Phi_S = Somma\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\;\Delta S\right) = Somma\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\Delta S_\perp\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Somma\left(\frac{\Delta S_\perp}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Somma\left(\frac{\Delta S_1}{r_1^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cdot Somma\left(\Delta S_1\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cdot 4\pi r_1^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ciò dimostra il teorema anche nel caso 2.

CASO N° 3 (caso generale): *la superficie* ***S non è sferica*** *e all'interno è contenuto* ***un numero qualsiasi di cariche*** *distribuite in modo qualsiasi.*

La dimostrazione è immediata: basta tenere presente il principio di sovrapposizione del campo elettrico e il caso 2.