

FUNZIONI

Una nozione importantissima in ogni settore della scienza è la nozione matematica di *funzione* (chiamata anche *corrispondenza* o *applicazione*). Diamo ora la definizione di *funzione*, alla quale farà seguito una serie di esempi chiarificatori:

Definizione 1.

*Dati due insiemi non vuoti A e B, si dice che f è una funzione da A in B se è una legge di qualunque tipo che associa ad **ogni** elemento di A **uno e un solo** elemento di B (cioè uno e non più di uno).*

In simboli:

$$f : A \rightarrow B$$

E' necessario capire molto bene ogni parola della precedente definizione; per fare ciò, consideriamo come esempio la seguente corrispondenza, che associa ad ogni persona di un certo gruppo di amici il giorno del proprio compleanno:

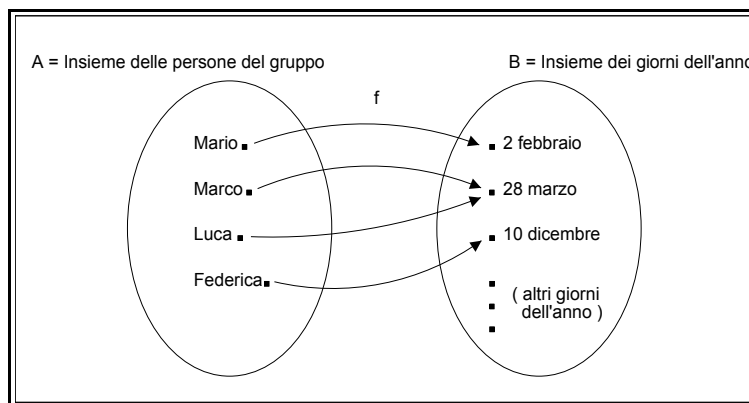


Fig. 1

La figura 1 mostra attraverso i diagrammi di Eulero-Venn che il compleanno di Mario è il 2 febbraio, il compleanno di Marco e di Luca è il 28 marzo e il compleanno di Federica è il 10 dicembre. L'insieme A è formato da 4 elementi (tanti quante sono le persone del gruppo), mentre l'insieme B è formato da 366 elementi (tanti quanti sono i giorni dell'anno). Si osserva dalla figura che solo 3 dei 366 giorni dell'anno sono compleanni.

Ora ci dobbiamo chiedere: l'esempio illustrato nella figura 1 è un esempio di funzione? Cioè: la legge f che associa ad ogni persona del gruppo di amici il giorno del proprio compleanno è una funzione? Per rispondere dobbiamo verificare che la definizione 1 sia soddisfatta in ogni sua parte:

- gli insiemi A e B non sono vuoti
- ad **OGNI** elemento di A è effettivamente associato qualcosa (basta vedere che da ogni elemento di A parte una freccia: non ci sono elementi di A dai quali non partono frecce)
- da ogni elemento di A parte **UNA SOLA** freccia, cioè ad ogni elemento di A è associato non più di un elemento di B

Pertanto la definizione 1 è ben verificata e possiamo concludere, dunque, che f (cioè la legge che associa ad ogni persona del gruppo il suo compleanno) è effettivamente una funzione; scriveremo quindi: $f : A \rightarrow B$

Facciamo ora altri esempi un po' più astratti, per indicare come la definizione di funzione è assai generale; consideriamo i seguenti due insiemi:

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{a, b, c, d\}$$

e consideriamo le leggi definite dalle associazioni indicate dalle frecce:

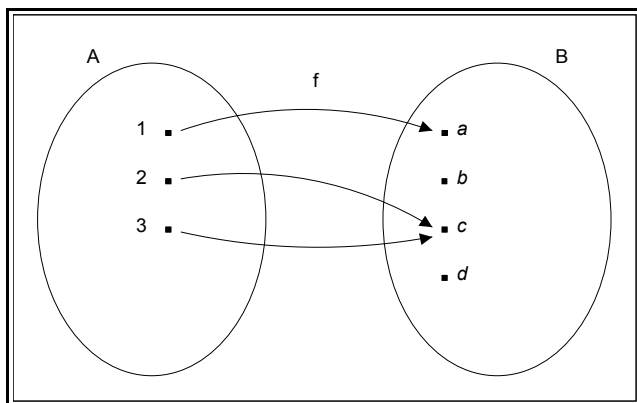


Fig. 2

La legge f in figura 2 è chiaramente una funzione; infatti:

- da ogni elemento di A parte una freccia,
- da ogni elemento di A parte non più di una freccia.

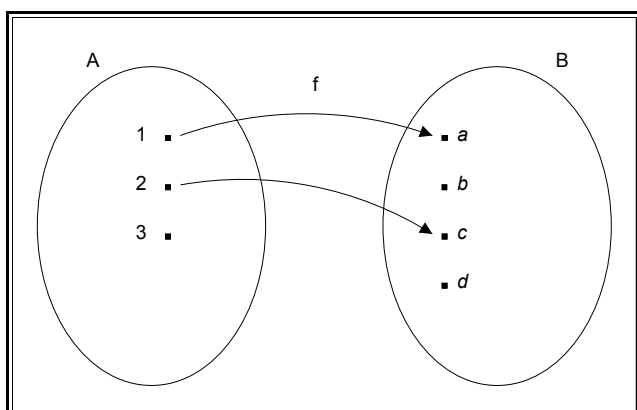


Fig. 3

La legge f in figura 3 NON è una funzione; infatti:

- esiste almeno un elemento in A (l'elemento 3) al quale non è associato alcun elemento di B

Se si rilegge la definizione di funzione, infatti, si nota che ad OGNI elemento di A deve essere associato qualcosa.

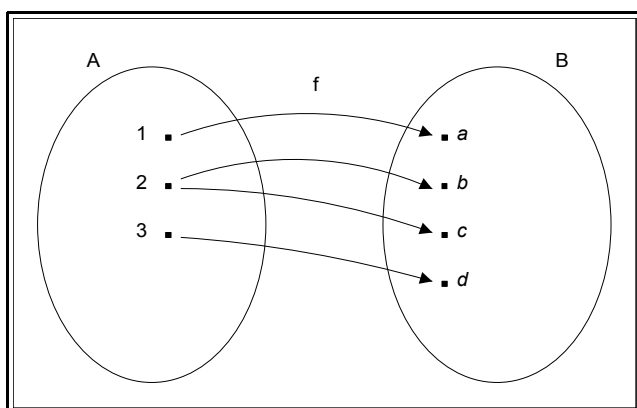


Fig. 4

La legge f in figura 4 NON è una funzione; infatti:

- esiste almeno un elemento in A (l'elemento 2) al quale è associato più di un elemento di B

Se si rilegge la definizione di funzione, infatti, si nota che ad ogni elemento di A non possono essere associati più elementi di B

Dunque la figura 2 rappresenta una funzione, mentre le figure 3 e 4 no. Facendo ancora riferimento alla figura 2, diremo che l'elemento a appartenente a B è *immagine* dell'elemento 1 appartenente ad A . Questo fatto si scrive in simboli così:

$$a = f(1) \quad \text{che si legge, appunto: } a \text{ è immagine di } 1 \text{ tramite la funzione } f.$$

Sempre dalla figura 2 deduciamo che: $c = f(2)$ $c = f(3)$

cioè gli elementi 2 e 3 hanno la stessa immagine c . Si dice anche che 1 è controimmagine di a e che gli elementi 2 e 3 sono controimmagini di c .

Dalla definizione 1 risulta chiaro che una funzione è caratterizzata da tre elementi:

1. dall'insieme A , che chiameremo **dominio** della funzione;
2. dall'insieme B , che chiameremo **insieme di arrivo** della funzione;
3. dalla legge f .

E' ovvio che se due funzioni hanno stesso dominio e stesso insieme di arrivo e sono caratterizzate

dalla stessa legge, allora le due funzioni coincidono.

Chiameremo *immagine della f* (simbolo: $\text{Im } f$; si chiama anche *codominio*) l'insieme costituito da tutti gli elementi di B che sono immagini di qualche elemento di A; per la funzione rappresentata in figura 2, ad esempio, avremo:

$$\text{Im } f = \{a, c\}$$

Possiamo ora dare la seguente definizione:

Definizione 2.

Data una funzione f da A in B , si dice che f è:

- **suriettiva** se $\text{Im } f = B$
- **iniettiva** se fa corrispondere ad elementi distinti di A elementi distinti di B
- **biunivoca** (o **biiettiva**) se è sia suriettiva che iniettiva.

Ovviamente la funzione in figura 2 non è né suriettiva né iniettiva; di seguito diamo degli esempi di funzione suriettiva, iniettiva e biunivoca:

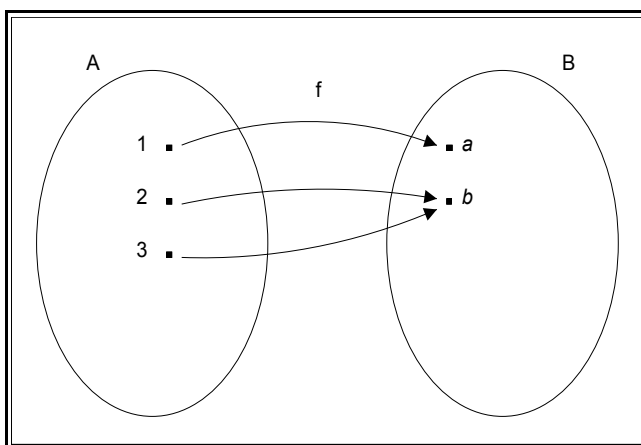


Fig. 5

La funzione f in figura 5 è chiaramente una funzione *suriettiva*; infatti:

$$\text{Im } f = B = \{a, b\}$$

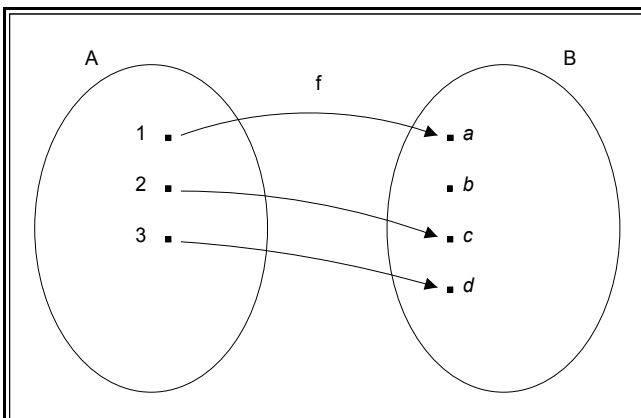


Fig. 6

La funzione f in figura 6 è chiaramente una funzione *iniettiva*; infatti ad elementi distinti di A fa corrispondere elementi distinti di B .

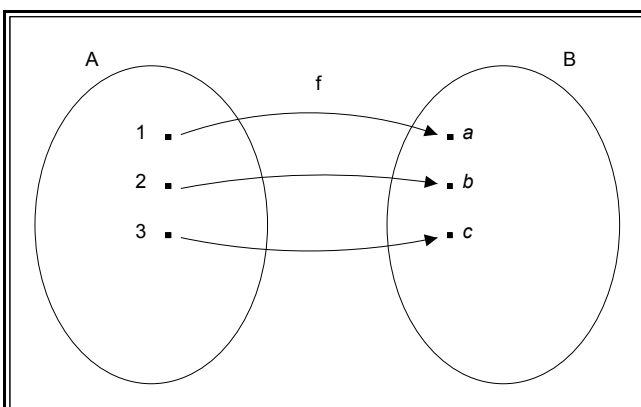


Fig. 7

La funzione f in figura 7 è chiaramente una funzione *biunivoca*.

Ogni funzione biunivoca è comunemente chiamata *corrispondenza biunivoca* e consiste in una corrispondenza del tipo uno-uno.

Ovviamente per una funzione biunivoca potremo sempre definire la sua **funzione inversa**: quella funzione, cioè, che associa ad ogni elemento di B la sua controimmagine rispetto a f; l'inversa della funzione f si indica solitamente con f^{-1} . Ovviamente il dominio della funzione inversa è B e il suo codominio è A.

Consideriamo come esempio l'inversa della funzione biunivoca rappresentata in figura 7:

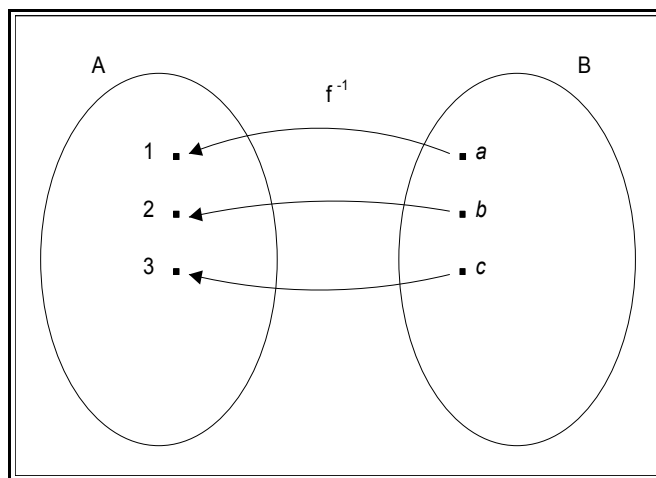


Fig. 8

Pertanto potremo scrivere la seguente corrispondenza:

$$\begin{array}{l}
 a=f(1) \\
 b=f(2) \\
 c=f(3)
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \begin{array}{l}
 1=f^{-1}(a) \\
 2=f^{-1}(b) \\
 3=f^{-1}(c)
 \end{array}$$

Come esempio notevole di funzione biunivoca si può considerare la funzione che associa ad ogni coppia di numeri reali (a,b) il punto P del piano cartesiano avente come coordinate, appunto, a e b:

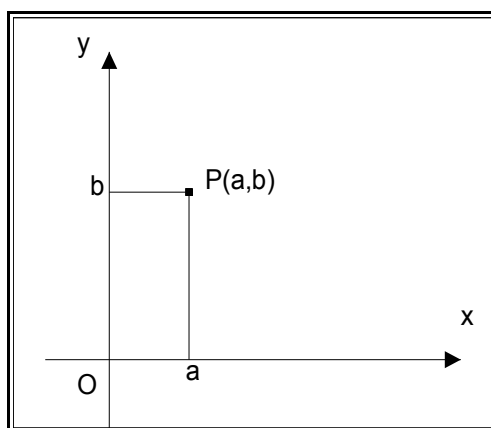


Fig. 9

Questa importante corrispondenza è stata storicamente introdotta in modo sistematico da Descartes e Fermat, due matematici del XVII secolo.