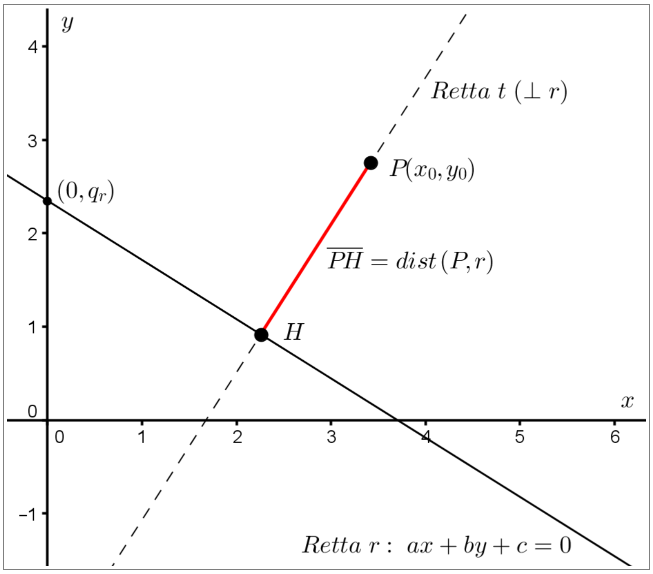
DISTANZA PUNTO-RETTA

Prof. Danilo Saccoccioni

Si considerino sul piano cartesiano la generica retta *r* di equazione $r:\ ax+by+c=0$ e il generico punto $P(x_0, y_0)$; vale la seguente formula, assai utile in molte situazioni, che permette di calcolare meccanicamente la distanza del punto *P* dalla retta *r*:

$$\boxed{dist(P,r)=\frac{|a x_0+b y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

(N.B. Al numeratore c'è un modulo)



L'unica difficoltà nel dimostrare la formula sta nella laboriosità dei passaggi algebrici; concettualmente è sufficiente calcolare la distanza di *P* da *H*, piede della perpendicolare alla retta *r*, come mostra la figura a lato. Se *r* è verticale oppure orizzontale la dimostrazione è banale e si lascia come esercizio al lettore; in caso contrario, l'equazione in forma esplicita si ricava immediatamente da quella implicita:

$r:\ y=m_r x+q_r$, con $m_r=-\dfrac{a}{b}$, $q_r=-\dfrac{c}{b}$.

La retta $t\perp r$ avrà coefficiente angolare $m_t=-\dfrac{1}{m_r}=\dfrac{b}{a}$ e, dovendo passare per il punto $P(x_0, y_0)$, la sua equazione sarà:

$t:\ y-y_0=m_t(x-x_0)$, cioè $t:\ y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$.

Il punto *H*, intersezione di *r* e *t* , ha coordinate che si calcolano risolvendo (rispetto a *x* e *y*) il seguente sistema:

$$\begin{cases} r:\ y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ t:\ y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0) \end{cases}$$

per sostituzione si ottiene, dopo qualche passaggio:

$$\begin{cases} x=\dfrac{b^2 x_0-a b y_0-a c}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{-a b x_0-a^2 y_0-b c}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Dunque il punto *H* ha coordinate:

$$H=\left(\frac{b^2 x_0-a b y_0-a c}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-a b x_0-a^2 y_0-b c}{a^2+b^2}\right)$$

Per calcolare, ora, la distanza fra *P* ed *r*, è sufficiente calcolare la misura del segmento $\overline{PH}$:

$$\overline{PH}=\sqrt{(x_0-x_H)^2+(y_0-y_H)^2}=\sqrt{\left(x_0-\frac{b^2 x_0-a b y_0-a c}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{-a b x_0-a^2 y_0-b c}{a^2+b^2}\right)^2}$$

Riducendo a denominatore comune nelle due parentesi e semplificando:

$$\overline{PH}=\sqrt{\left(\frac{a^2 x_0+a b y_0+a c}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a b x_0+b^2 y_0+b c}{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a\cdot(a x_0+b y_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b\cdot(a x_0+b y_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2\cdot(a x_0+b y_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2\cdot(a x_0+b y_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cdot(a x_0+b y_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(a x_0+b y_0+c)^2}{(a^2+b^2)}}=\frac{|a x_0+b y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ovviamente **se si dispone della forma esplicita** dell'equazione di *r*, cioè $y=m_r x+q_r$, si può sempre ottenere la forma implicita, ovvero $m_r x-y+q_r=0$, pertanto: $\boxed{dist(P,r)=\dfrac{|m_r x_0-y_0+q_r|}{\sqrt{m_r^2+1}}}$.