ESTREMI – CONCAVITA' – STUDIO DI FUNZIONE

Danilo Saccoccioni

Si consideri una funzione definita in $[a,b]$ e sia $x_0 \in [a,b]$. Se esiste un intorno *J* (sottoinsieme di $[a,b]$) del punto x_0 tale che per ogni $x \neq x_0$ risulta:

- $f(x) \leq f(x_0)$, allora si dice che x_0 è un **punto di massimo relativo**;
- $f(x) \geq f(x_0)$, allora si dice che x_0 è un **punto di minimo relativo**;
- $f(x) < f(x_0)$, allora si dice che x_0 è un **punto di massimo relativo proprio**;
- $f(x) < f(x_0)$, allora si dice che x_0 è un **punto di minimo relativo proprio**.

Teorema di Fermat (condizione necessaria per l'esistenza di un max/min relativo di una funzione derivabile):

Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0 interno all'intervallo $[a,b]$ ed il punto x_0 è di massimo o di minimo relativo, risulta $f'(x_0)=0$

Un punto x_0 si dice **critico** se $f'(x_0)=0$ oppure la derivata non esiste. Se $f'(x_0)=0$ il punto si dice anche **stazionario**.

Condizione sufficiente per l'esistenza di un estremo relativo per funzioni derivabili:

Si consideri una funzione $f(x)$ continua in un intorno *J* di un punto critico x_0 e derivabile in ogni punto di questo intorno (eccetto al più x_0):

- se nell'intorno *J* risulta
  $$f'(x)\begin{cases} <0, & \text{per } x<x_0 \\ >0, & \text{per } x>x_0 \end{cases}$$
  allora x_0 è un punto di minimo relativo proprio per la funzione;
- se nell'intorno *J* risulta
  $$f'(x)\begin{cases} <0, & \text{per } x>x_0 \\ >0, & \text{per } x<x_0 \end{cases}$$
  allora x_0 è un punto di massimo relativo proprio per la funzione;
- se nell'intorno *J* $f'(x)\neq 0$ non cambia mai segno, allora x_0 non è né di massimo relativo né di minimo relativo per la funzione.

Per determinare i punti di massimo / minimo relativo, allora, si può procedere cercando i punti in cui la derivata prima cambia segno. Nei casi in cui non risulti semplice determinare il segno della derivata prima in un intorno *J* del punto, è possibile utilizzare il seguente criterio *puntuale*:

Si consideri una funzione $f(x)$ definita e derivabile *n* volte ($n \geq 2$) in $[a,b]$. Se in x_0 interno ad $[a,b]$ si ha:

1. $f'(x_0)=0$
2. tra le derivate successive della funzione calcolate in x_0 la prima che non si annulla è di ordine *n*,

allora:

- se n è dispari il punto x_0 non è né di massimo né di minimo relativo;
- se n è pari e se:
  - $f^{(n)}(x_0)>0$, il punto x_0 è di minimo relativo proprio;
  - $f^{(n)}(x_0)<0$, il punto x_0 è di massimo relativo proprio.

Osservazioni:

- Se la funzione è continua ma non derivabile in un punto, si possono avere i casi di **punto angoloso** / **cuspide**.
- Per ricercare i punti di **massimo** / **minimo assoluti** in un intervallo chiuso $[a,b]$ occorre controllare <u>anche</u> cosa succede agli estremi *a* e *b* dell'intervallo.

Si dice che una funzione $f(x)$ è (strettamente) **concava verso l'alto** in $[a,b]$ se per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di $[a,b]$ il segmento che congiunge i punti $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ sta tutto al di sopra del grafico di $f(x)$.
Si dice che una funzione $f(x)$ è (strettamente) **concava verso il basso** in $[a,b]$ se per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di $[a,b]$ il segmento che congiunge i punti $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ sta tutto al di sotto del grafico di $f(x)$.

Condizione sufficiente per la concavità (verso l'alto):

> Data una funzione $f(x)$, se
> - $f(x)$ è continua in $[a, b]$
> - $f(x)$ è due volte derivabile in ogni punto interno dell'intervallo
> - $f''(x)>0$ per ogni x
>
> allora $f(x)$ è strettamente concava verso l'alto in $[a, b]$.

Ovviamente se nel teorema precedente si considera $f''(x)<0$ la funzione sarà strettamente concava verso il basso.

> Siano $f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ ed x_0 un punto interno ad esso. Inoltre f sia derivabile in x_0 oppure $f'(x_0)=\pm\infty$.
> Si dice che f ha in x_0 un **punto di flesso** se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è concava verso l'alto (il basso) e un intorno sinistro in cui è concava verso il basso (l'alto).

Per determinare i punti di flesso, allora, si può procedere cercando i punti in cui la derivata seconda cambia segno. E' inoltre utile determinare la pendenza della tangente nel punto di flesso attraverso la derivata prima.
Nei casi in cui non risulti semplice determinare il segno della derivata seconda, è possibile utilizzare il seguente criterio *puntuale*:

> Se $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)\neq 0$ allora il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è di flesso per la funzione.
>
> Più in generale, se
> - $f''(x_0)=0$
> - $f^{(n)}$ è la prima (con $n > 2$) che non si annulla in x_0
> - n è dispari
>
> allora $P_0(x_0, f(x_0))$ è di flesso.

Osservazione:
- Un flesso può anche essere a tangente verticale.

<u>STUDIO DI UNA FUNZIONE</u>

- **Dominio**
- Eventuali **simmetrie** (funzione pari / dispari) e **periodicità** (periodo T)
- **Intersezioni con gli assi** e **segno della funzione**
- **Comportamento agli estremi** del dominio attraverso lo studio dei limiti (destro e sinistro e a $\pm\infty$) e lo studio degli **asintoti**.
- Studio del **segno e delle radici della derivata prima**: monotonia, massimi/minimi relativi
- Studio del **segno e delle radici della derivata seconda**: concavità e flessi (N.B. La tangente nel p.to di flesso si determina con la derivata prima)
  - Studio di *eventuali punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale*.
- Lo studio può essere completato precisando
  - Eventuali massimo/minimo assoluti
  - Iniettività, suriettività, codominio, sup/inf
  - Inoltre è (ovviamente) sempre possibile calcolare esplicitamente il valore di $f(x)$ in qualche punto di interesse