FORMULARIO

prof. Danilo Saccoccioni

E' fondamentale ricordare le seguenti equivalenze, valide per tre numeri qualsiasi a, b e c che le rendano sensate (secondo quanto illustrato ai punti seguenti):

$$\boxed{b=a^c \text{ (potenza)} \leftrightarrow a=\sqrt[c]{b} \text{ (radice)} \leftrightarrow c=\log_a(b) \text{ (logarit.)}}$$

PROPRIETA' DELLE POTENZE

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^m \cdot b^m = (a\cdot b)^m$
4. $a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = (a\div b)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
5. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ ***Potenza di potenza***

Le precedenti proprietà sono valide nei seguenti casi:

- se gli esponenti sono interi (anche negativi), le basi possono assumere qualsiasi valore reale (anche negativo), purché si evitino le situazioni indicate sotto;
- se gli esponenti sono frazionari o irrazionali, le basi devono essere positive.

Situazioni particolari:

- $a^0=1$, per qualsiasi valore di a diverso da zero;
- 0^0 , simbolo privo di significato;
- se r è positivo, $0^r=0$
- se r è negativo, 0^r è un simbolo privo di significato;
- $1^r=1$ per qualsiasi valore r;

Si ricordi ovviamente che $\boxed{a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^r}$, purché il denominatore non si annulli e vengano rispettate le condizioni precedenti.

PROPRIETA' DELLE RADICI

Valgono le seguenti proprietà se i radicandi sono positivi:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$
3. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ ***Proprietà invariantiva dei radicali***
4. $\sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ ***Radice di un prodotto***
5. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ ***Radice di un rapporto***
6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ***Potenza di una radice***
7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$ ***Radice di un radicale***

Occorre fare molta attenzione al caso di radicandi negativi; innanzitutto in tal caso l'indice deve essere dispari, altrimenti il radicale non è definito nei numeri reali; inoltre talvolta le proprietà sopra riportate non valgono se applicate direttamente a radicandi negativi, come mostra il seguente esempio:

- Passaggi errati:
  $-2=\sqrt[3]{(-2)^3}=\sqrt[3\cdot 2]{(-2)^{3\cdot 2}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$
  (Tentando di applicare la proprietà invariantiva siamo giunti all'assurdo che $-2 = 2$; dunque la proprietà invariantiva non si può applicare ad una base negativa come -2)
- Passaggi corretti:
  $-2=\sqrt[3]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2^3}=-\sqrt[3]{2^3}=-\sqrt[6]{2^6}=-2$

L'esempio mostra che per applicare correttamente le proprietà delle radici con radicandi negativi e indici dispari occorre prima trasportare il segno "–" fuori della radice, in modo che rimanga dentro la radice un radicando positivo.

Si ricordi infine che $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ e $a^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

PROPRIETA' DEI LOGARITMI

Valgono le seguenti proprietà se gli argomenti dei logaritmi sono positivi e le basi sono positive e diverse da 1:

1. $a^{\log_a(b)}=b$
2. $\log_a(a)=1$
3. $\log_a(1)=0$
4. $\log_a(b\cdot c)=\log_a(b)+\log_a(c)$ ***Logar. di un prodotto***
5. $\log_a(b\div c)=\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a(b)-\log_a(c)$ ***di un rapp.***
6. $\log_a(b^c)=c\cdot\log_a(b)$ ***di una potenza***
7. $\log_a\left(\sqrt[n]{b^m}\right)=\dfrac{m}{n}\cdot\log_a(b)$ ***di una radice***
8. $\log_a(b)=\dfrac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ ***Formula del cambiamento di base***

(valida per qualsiasi c che rispetti le solite condizioni)

***

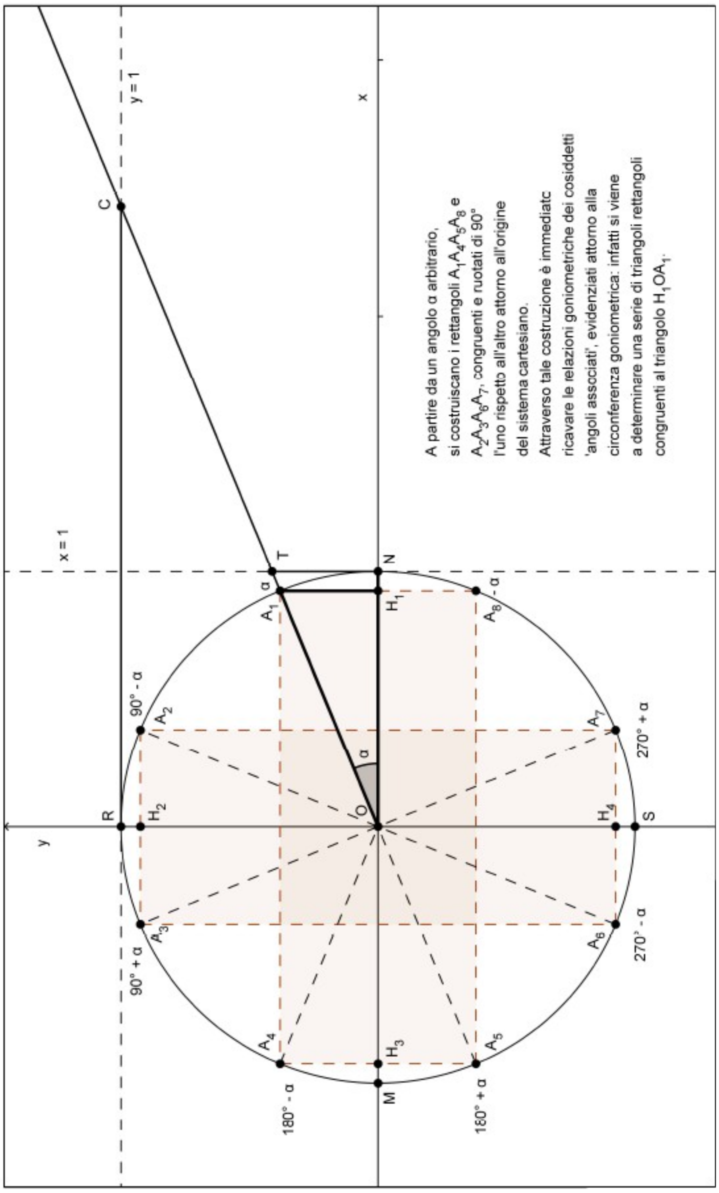
FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

1. Definizione: $F(x)=|x|=\begin{cases} x\ , & \text{se } x\geqslant 0 \\ -x\ , & \text{se } x<0 \end{cases}$
2. $|x|=|-x|$, per qualsiasi numero (anche le formule successive)
3. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$
5. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ disuguaglianza triangolare

FORMULE GONIOMETRICHE

1. Formule degli angoli associati

Possono essere ricavate facilmente dal seguente grafico (ruotare il foglio per un utilizzo corretto):



2. Valori notevoli

	seno	coseno	tangente	cotangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Formule fondamentali della goniometria

1. $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, per qualsiasi x
2. $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, per $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
3. $\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, per $x\neq k\pi$

4. Espressione di tutte le funzioni goniometriche mediante una sola di esse

Il segno effettivo delle seguenti formule va determinato sulla base del quadrante di lavoro.

Funzione nota \ Funzione da calcolare	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\sin(x)$	$\sin(x)$	$\pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$	$\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\sin(x)}$
$\cos(x)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$	$\cos(x)$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$	$\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\tan(x)}$
$\cot(x)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$	$\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1+\cot^2(x)}}$	$\frac{1}{\cot(x)}$	$\cot(x)$

5. **Formule di addizione e sottrazione**

Occorre scegliere SOLO i segni superiori o SOLO i segni inferiori

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\sin(\beta)\cos(\alpha)$
2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

6. **Formule di duplicazione**

1. $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=$ $=2\cos^2(\alpha)-1=$ $=1-2\sin^2(\alpha)$
3. $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

7. **Formule di bisezione**

Il segno dipende dal quadrante di lavoro

1. $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
2. $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
3. $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

8. **Formule di prostaferesi**

1. $\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
3. $\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
4. $\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

9. **Formule di Werner**

1. $\sin(\alpha)\sin(\beta)=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
2. $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
3. $\sin(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

10. **Formule parametriche**

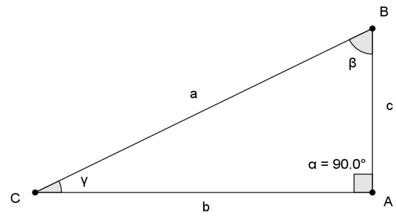
Ponendo $t=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, valgono le seguenti formule per $\alpha\neq180°+k\cdot360°$:

1. $\sin(\alpha)=\dfrac{2t}{1+t^2}$
2. $\cos(\alpha)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
3. $\tan(\alpha)=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $\alpha\neq k\,90°$, $k\neq multipli\ di\ 4$

TRIGONOMETRIA

1. **Triangoli rettangoli**

1. In un triangolo rettangolo un cateto qualsiasi è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, oppure per il coseno dell'angolo acuto adiacente (vedi sotto).
2. In un triangolo rettangolo un cateto qualsiasi è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo o per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al medesimo (vedi sotto).



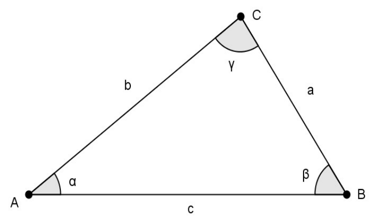
$c=a\cdot\sin(\gamma)=a\cdot\cos(\beta)$

$b=a\cdot\sin(\beta)=a\cdot\cos(\gamma)$

$c=b\cdot\tan(\gamma)=b\cdot\cot(\beta)$

$b=c\cdot\tan(\beta)=c\cdot\cot(\gamma)$

2. **Triangoli qualsiasi**



1. **Teorema dei seni**
In un triangolo il rapporto di ciascun lato con il seno dell'angolo opposto è costante, nel senso che non varia al variare della coppia lato-angolo scelta:
$\dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{b}{\sin(\beta)}=\dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
2. **Teorema del coseno**
In un triangolo il quadrato costruito su un lato è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi ultimi per il coseno dell'angolo fra essi compreso:
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

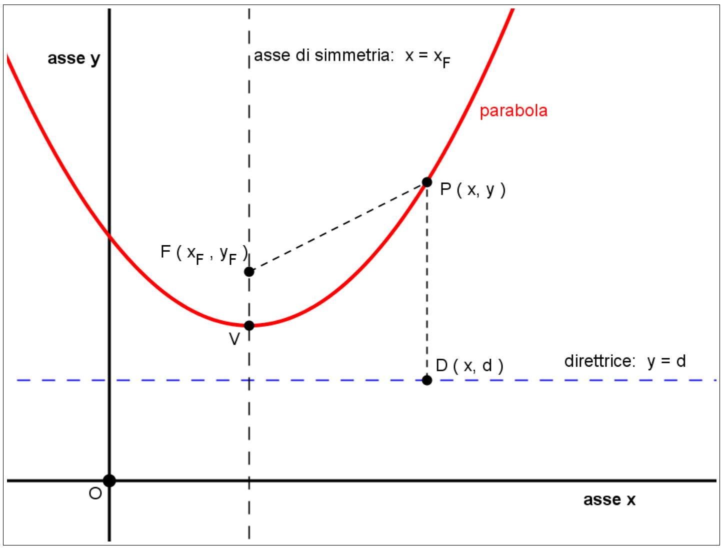
LE CONICHE SUL PIANO CARTESIANO

1. LA RETTA

Per la retta si deve fare riferimento al seguente link:
http://www.danilo.saccoccioni.name/mat/formulario_retta.pdf
Inoltre è molto importante conoscere e capire a fondo i contenuti della dispensa che si trova a quest'altro link, riguardanti il significato geometrico del coefficiente angolare e del termine noto (o quota) di una retta non verticale sul piano cartesiano:
http://www.danilo.saccoccioni.name/mat/coeffangol.pdf

2. LA PARABOLA

Illustriamo le formule relative ad una parabola con asse verticale; nel caso di parabola con asse orizzontale è sufficiente invertire il ruolo delle ascisse e delle ordinate.



Luogo dei punti P per i quali: $\overline{PF}=\overline{PD}$
Equazione canonica: $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$
Se sono noti fuoco e direttrice allora:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2(y_F-d)} \\ b=-\dfrac{x_F}{y_F-d} \\ c=\dfrac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)} \end{cases}$$

Se invece sono noti a, b e c, posto $\Delta=b^2-4ac$, si ha

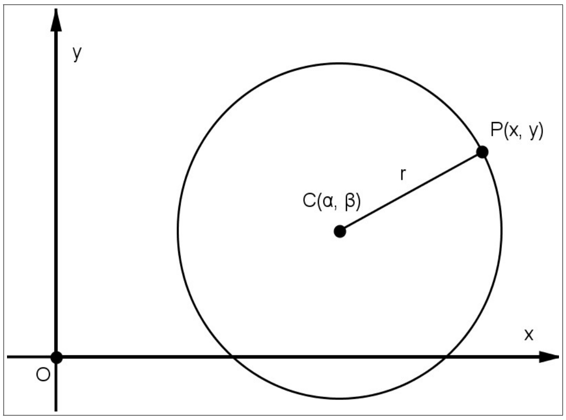
Fuoco: $x_F=-\dfrac{b}{2a}$, $y_F=\dfrac{-\Delta+1}{4a}$

Vertice: $x_V=-\dfrac{b}{2a}$, $y_V=\dfrac{-\Delta}{4a}$

Equaz. della direttrice: $y=\dfrac{-\Delta-1}{4a}$

Equaz. asse di simmetria: $x=-\dfrac{b}{2a}$

3. LA CIRCONFERENZA



Equazione cartesiana: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
Sviluppando i quadrati si ottiene l'equazione canonica:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad ,$$

dove: $a=-2\alpha$, $b=-2\beta$, $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$.

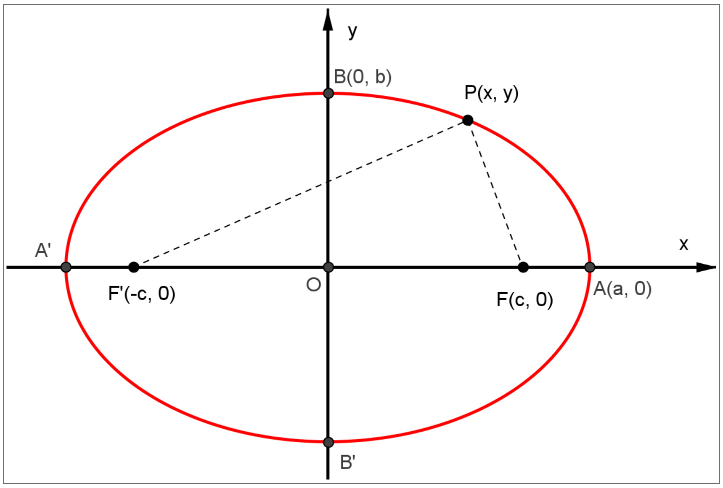
Viceversa, invertendo le formule precedenti, è facile rendersi conto che un'equazione del tipo
$x^2+y^2+ax+by+c=0$
rappresenta una circonferenza se $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-c>0$
e in tal caso il centro e il raggio sono dati da:

centro: $\alpha=-\dfrac{a}{2}$, $\beta=-\dfrac{b}{2}$

raggio: $r=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-c}$

4. L'ELLISSE

Illustriamo le formule relative ad un'ellisse con centro di simmetria in O e fuochi sull'asse x; nel caso di ellisse con fuochi sull'asse y è sufficiente invertire il ruolo delle ascisse e delle ordinate.



Luogo dei punti P per i quali: $\overline{PF'}+\overline{PF}=cost$
(ovviamente la costante vale $2a$)

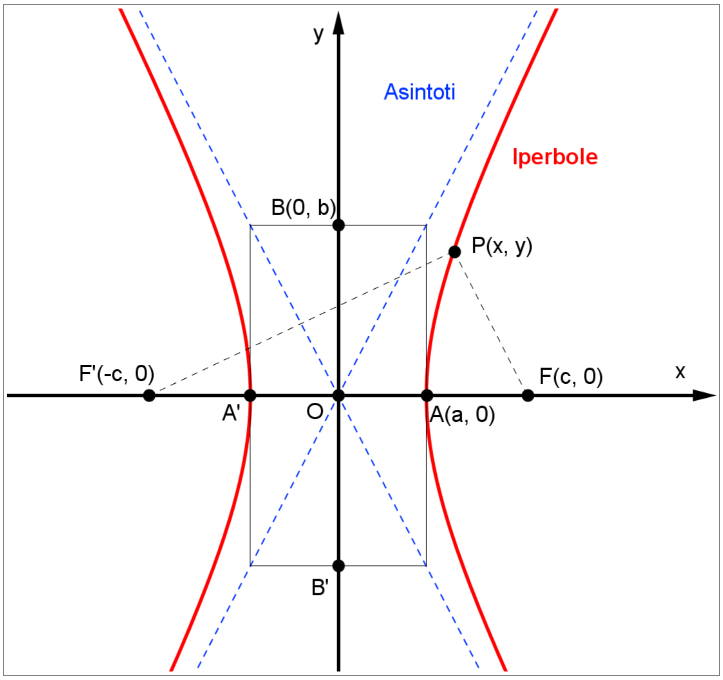
Equazione canonica (o normale): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

risultando: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Eccentricità: $e=\dfrac{c}{a}$ (è compresa fra 0 e 1; vale zero per la circonferenza; all'aumentare dell'eccentricità aumenta lo schiacciamento dell'ellisse).

5. L'IPERBOLE

Illustriamo le formule relative ad un'iperbole con centro di simmetria in O e fuochi sull'asse x; nel caso di iperbole con fuochi sull'asse y è sufficiente invertire il ruolo delle ascisse e delle ordinate.



Luogo dei punti P per i quali: $|\overline{PF'} - \overline{PF}| = cost$
(ovviamente la costante vale $2a$)

Equazione canonica (o normale): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

risultando: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

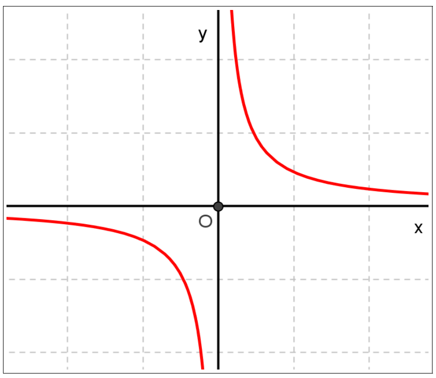
Eccentricità: $e = \frac{c}{a}$ (è sempre maggiore di 1; per valori prossimi ad 1, l'iperbole è molto schiacciata verso l'asse x).

Equazioni degli asintoti:

$$y = \frac{b}{a}x \quad , \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

L'asse che contiene i due fuochi (in questo caso l'asse x) si chiama *asse trasverso* (ma talvolta con questo termine si denota il segmento AA').
L'asse che non contiene i due fuochi (in questo caso l'asse y) si chiama asse non trasverso (ma talvolta con questo termine si denota il segmento BB').

Se $a = b$ l'iperbole viene detta equilatera e ha ovviamente equazione $x^2 - y^2 = a^2$. Se un'iperbole equilatera viene ruotata di 45° in senso antiorario attorno al punto O, si ottiene l'equazione $x \cdot y = \frac{a^2}{2}$, che corrisponde alla relazione di proporzionalità inversa fra le grandezze rappresentate da x e y:



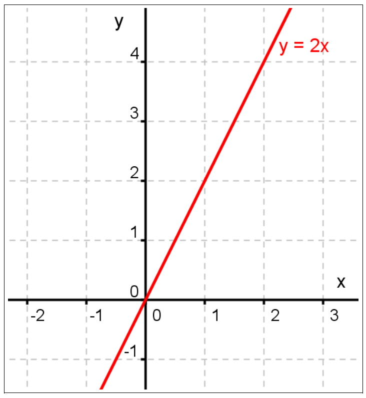
PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

E' fondamentale sia in matematica che in fisica avere ben chiari i concetti di proporzionalità diretta ed inversa.

Due grandezze x ed y si dicono direttamente proporzionali se il loro rapporto rimane costante al variare di esse, ovvero:

$$\frac{y}{x} = m \quad , \quad \text{dove } m \text{ è detta costante di proporzionalità.}$$

Poiché la relazione precedente può essere meglio scritta come $y = m \cdot x$ (in tal modo la coppia di grandezze x e y può anche annullarsi, senza pericolo per il denominatore), il grafico cartesiano di due grandezze direttamente proporzionali è una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare m (l'esempio di figura mostra una proporzionalità diretta di costante 2):



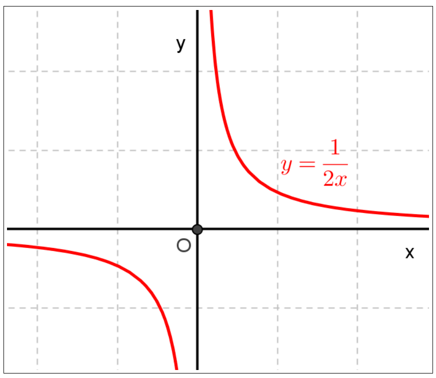
Ovviamente se m è negativo la retta ha pendenza verso il basso.

***

Due grandezze x ed y si dicono inversamente proporzionali se il loro prodotto rimane costante al variare di esse, ovvero:

$$x \cdot y = k \quad , \quad \text{dove } k \text{ è detta costante di proporz. inversa.}$$

Poiché la relazione precedente può essere scritta come $y = \frac{k}{x}$ (in ogni caso x non può annullarsi), il grafico cartesiano di due grandezze inversamente proporzionali è un'iperbole equilatera di cui si può calcolare la misura dell'asse trasverso (vedere formule dell'iperbole). L'esempio di figura mostra una proporzionalità inversa di costante ½.



Ovviamente se k è negativo, i due rami dell'iperbole giacciono nel II e nel IV quadrante.