GUIDA AI LIMITI

Prof. Danilo Saccoccioni

I numeri di pagina indicati fra parentesi fanno riferimento al libro di testo
M. BERGAMINI, A. TRIFONE, G. BAROZZI, *Matematica.blu 2.0*, Vol. 5, Zanichelli, Bologna 2011.

Definizione di limite per funzioni definite su intervalli (o unione di intervalli) [pag. 1430]

> Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme *A*, intervallo o unione di intervalli.
> Sia inoltre x_0 interno ad *A* o un suo estremo anche non appartenente ad *A* (potendo essere anche $\pm\infty$).
> Si dice che *esiste* il limite per *x* che tende a x_0 e che tale limite vale *l* (che può essere un numero o $\pm\infty$) se **per ogni** intorno I di *l* **esiste** un intorno J di x_0 tale che comunque si consideri *x* appartenente a $A \cap \mathrm{J} - \{x_0\}$, l'immagine di *x* appartenga ad I; in formule:
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathrm{I} \text{ (intorno di } l\text{) } \exists \mathrm{J} \text{ (intorno di } x_0\text{) tale che } \forall x \in A \cap \mathrm{J} - \{x_0\} \text{ si ha } f(x) \in \mathrm{I}$$

La definizione precedente
- vale anche se *A* non è un intervallo, purché x_0 sia di *accumulazione* per *A*;
- può essere modificata considerando un intorno J *destro* o *sinistro* e in tali casi si parla rispettivamente di *limite destro* o *limite sinistro*;
- è la base per dimostrare i vari teoremi riguardanti i limiti, riportati in queste pagine;
- può essere resa in una forma adatta al calcolo esprimendo opportunamente gli intorni attraverso disequazioni (con i moduli).

Teorema di unicità del limite (pag. 1431)

> Se esiste il limite della funzione $f(x)$ per *x* tendente a x_0, tale limite è unico.

Teorema di permanenza del segno (pag. 1432)

> Se per *x* tendente a x_0 la funzione $f(x)$ tende al limite *l*, esiste un intorno di x_0 i cui elementi (escluso al più x_0) hanno immagini dello stesso segno di *l*.

Teorema del confronto (o *dei due carabinieri*) (pag. 1433)

> Siano $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intervallo, escluso al più un punto x_0 di esso (eventualmente di frontiera); se valgono le seguenti condizioni:
> - per ogni *x* risulta $f(x) \le h(x) \le g(x)$
> - $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$
>
> allora risulta anche $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Definizione e proprietà di una funzione infinitesima per *x* che tende a x_0

> - Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per *x* che tende a x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
> - Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora in un opportuno intorno di x_0 $f(x)$ può essere espressa come $l + \alpha(x)$, con $\alpha(x)$ infinitesima in x_0.
> - Se $f(x)$ è un infinitesimo per *x* che tende a x_0 e se esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione non si annulla (cioè non vale mai 0), allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
> - La somma algebrica di un numero finito di infinitesimi è un infinitesimo.
> - Il prodotto di una funzione infinitesima per una funzione limitata è una funzione infinitesima.

Per calcolare il valore di un limite, solitamente le tecniche impiegate utilizzano:

- i teoremi relativi alle **operazioni sui limiti**;
- la nozione di **continuità** delle funzioni;
- le proprietà fondamentali delle **funzioni elementari** (occorre ricordare i grafici);
- il riconoscimento di **limiti notevoli**
- **tecniche standard** di scomposizione in fattori e semplificazione, razionalizzazione, sostituzioni di variabili ecc…
- **inifinitesimi equivalenti** e **ordini di infinito**;
- il teorema di **DE L'HOSPITAL** (dopo lo studio delle derivate).

Teorema relativo alle operazioni sui limiti

Gli enunciati vanno studiati alle pagine da 1476 in poi del libro, ma di seguito si riporta un comodissimo schema riassuntivo.

N.B.
Nella tabella occorre considerare che

- l e l' sono numeri (non ∞) *diversi da zero*;
- vale la *regola dei segni* per prodotti e quozienti (anche per ∞).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	l	∞	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	l	0	$-\infty$
$g(x)$	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	l'	0	0	$-\infty$
$f(x)+g(x)$	$l+l'$	∞	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	l'	l	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)$	$l\cdot l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$			0	0	0	$+\infty$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$			0	∞	0	∞ se $g(x)\neq 0$ in un intorno opportuno		

Come si può osservare, la precedente tabella ha delle caselle vuote. Esse corrispondono a **forme di indecisione** (o forme indeterminate), nel senso che nulla si può dire del risultato applicando il teorema delle operazioni: occorre calcolare il limite caso per caso tenendo presenti i criteri generali elencati in precedenza.
Ecco un **elenco delle forme di indecisione**, da conoscere molto bene:

$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$0\cdot\infty$	$+\infty-\infty$	0^0	1^∞	∞^0

Abbiamo visto che nel concetto di limite per x che tende a x_0 non interessa *il valore della funzione nel punto* x_0, ma solo *nei pressi* di x_0. Tuttavia in molti casi il valore del limite per x che tende a x_0 coincide con il valore assunto dalla funzione nello stesso punto, cioè con $f(x_0)$. In questi casi si parla di continuità della funzione nel punto x_0:

Definizione di continuità di una funzione: (pag. 1416 e da 1497 in poi)

Sia x_0 un punto appartenente al dominio di una funzione $f(x)$;

- se esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- e tale limite vale $f(x_0)$,

allora la funzione si dice ***continua nel punto*** x_0.
Se una funzione è continua in ogni punto di un intervallo, essa si dice **continua nell'intervallo**.

Si parla di **continuità a destra o a sinistra**,

- se esiste rispettivamente $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
- e tale limite vale $f(x_0)$.

Proprietà delle funzioni continue [Teoria ed esempi da pag. 1497 in poi]

- Se due funzioni sono continue in un punto, *sono pure continui* nel medesimo punto la loro **somma**, la loro **differenza**, il loro **prodotto** e il loro **quoziente** (se il denominatore non si annulla nel punto in questione).
- Il **modulo** di una funzione continua è una funzione continua.
- **Criterio di continuità per le funzioni monotone** in un intervallo chiuso:

  Se una funzione $f(x)$
  - è definita e monotona in un intervallo chiuso $[a,b]$,
  - assume tutti i valori fra $f(a)$ e $f(b)$,

  allora la funzione è continua nell'intero intervallo.
- Le **funzioni elementari** (razionali, goniometriche, esponenziali, logaritmiche e funzioni potenza) **sono continue** nel loro insieme di definizione.
- Una funzione $f(x)$ **continua** in un **intervallo chiuso e limitato** gode delle seguenti proprietà fondamentali:
  - è **limitata** ed **ammette** in tale intervallo **minimo assoluto e massimo assoluto** (**teorema di Weierstrass**);
  - assume ogni valore compreso tra il suo minimo e il suo massimo nell'intervallo (**teorema dei valori intermedi** o di Darboux-Bolzano);
  - se agli estremi dell'intervallo la funzione ha valori di segno opposto, esiste almeno un punto dell'intervallo in cui essa si annulla (**teorema di esistenza degli zeri**).
  - se $f(x)$ è monotona in senso stretto, f ammette funzione inversa che è continua e monotona in $[\min f, \max f]$ (**teorema di continuità delle funzioni inverse**).
- Se $f(x)$ è continua in un intervallo, l'immagine di tale intervallo è un intervallo.
- **Teorema di continuità delle funzioni composte**:

  Se valgono le seguenti condizioni:
  - esiste $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$
  - se $\lim_{z\to l} f(z) = f(l)$ (cioè *f* è continua in *l*)

  allora risulta $\lim_{x\to x_0} f\left[g(x)\right] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(l)$

  Se *inoltre* $g(x)$ è continua in x_0, allora la funzione composta $f\left[g(x)\right]$ è continua in x_0.

Tenendo presenti le proprietà delle funzioni elementari, possiamo scrivere (ci si aiuta ricordando i grafici):

1. **Funzione potenza** $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & \text{se } n \text{ è intero positivo dispari} \\ +\infty, & \text{se } n \text{ è intero positivo pari} \end{cases}$

   $\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty$, se r è un numero reale positivo qualsiasi;

   $\lim_{x\to 0^+} x^r = 0$, se r è un numero reale positivo qualsiasi;

2. **Funzione radice** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, se n è intero positivo dispari;

3. **Funzione esponenziale** $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

4. **Funzione logaritmo** $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ -\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

5. **Funzione tangente** $\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}\right]^+} \tan(x) = -\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^+} \tan(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}\right]^-} \tan(x) = +\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^-} \tan(x) = +\infty$

Per la cotangente?

6. **Inverse delle funzioni circolari**

$$\lim_{x\to[-1]^+} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to[-1]^+} \arccos(x) = \pi \qquad \lim_{x\to 1^-} \arccos(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}$$

LIMITI NOTEVOLI

Di seguito si riporta per comodità una lista di limiti notevoli, utili, talvolta, per la decisione di forme indeterminate. Le dimostrazioni devono essere studiate alle pagine 1489 - 1491.
All'interno delle funzioni goniometriche l'angolo è inteso in radianti.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$	$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad k\in\mathbb{R}$	$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$
$\lim_{x\to 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)$		
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a), \quad a>0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$		
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{kx} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$		
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} = 0, \quad c>0$	$\lim_{x\to 0^+} x^c\ln(x) = 0, \quad c>0$	$\lim_{x\to+\infty} \left(x-c\ln(x)\right) = +\infty, \quad \forall c\in\mathbb{R}$	
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^c} = +\infty, \quad \forall c\in\mathbb{R}$	$\lim_{x\to+\infty} x^c e^{-x} = 0, \quad \forall c\in\mathbb{R}$		
Se $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, allora $\lim_{x\to c} \left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c}\left\{\left[f(x)-1\right]g(x)\right\}}$			

CONFRONTO TRA INFINITESIMI E CONFRONTO TRA INFINITI

(da pag. 1492 a pag. 1497: soprattutto gli esempi)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **funzioni infinitesime** per *x* che tende a x_0. Possiamo avere uno dei seguenti casi per il limite

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$	$=\ell\neq 0,\quad (\ell \text{ numero})$	$f(x)$ e $g(x)$ si dicono **infinitesimi dello stesso ordine**. Se in particolare $\ell=1$ si dicono **infinitesimi equivalenti**.
	$=0$	$f(x)$ si dice **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a $g(x)$
	$=\pm\infty$	$f(x)$ si dice **infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$
	non esiste	i due infinitesimi sono non confrontabili

Dai limiti notevoli si ricavano le seguenti **coppie di infinitesimi equivalenti** per *x* che tende a zero:

$\sin(x)\sim x$	$\arcsin(x)\sim x$	$a^x-1\sim x\cdot\ln(a)$
$\tan(x)\sim x$	$\arctan(x)\sim x$	$e^x-1\sim x$
$1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x)\sim x$	$(1+x)^k-1\sim kx$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due **funzioni infinite** per *x* che tende a x_0. Possiamo avere uno dei seguenti casi per il limite

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$	$=\ell\neq 0,\quad (\ell \text{ numero})$	$f(x)$ e $g(x)$ si dicono **infiniti dello stesso ordine**. Se in particolare $\ell=1$ si dicono **infiniti equivalenti**.
	$=0$	$f(x)$ si dice **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$
	$=\pm\infty$	$f(x)$ si dice **infinito di ordine superiore** rispetto a $g(x)$
	non esiste	i due infiniti sono non confrontabili

Dai limiti notevoli possiamo stabilire la seguente **graduatoria per gli ordini di infinito** quando *x* tende a $+\infty$:

$\log_a(x),\ a>1$	$x^r,\ r>0$ N.B. l'ordine cresce al crescere di *r*	$a^x,\ a>1$	x^x

Esercizio: Cosa puoi dire dell'ordine di infinito di tangente e cotangente?

Per gli infinitesimi valgono due importanti teoremi, utili per il calcolo dei limiti:

1. **Principio di sostituzione degli infinitesimi**

   Se il rapporto di due infinitesimi ammette un limite, quest'ultimo resta invariato se si sostituisce ciascun infinitesimo con uno equivalente: $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_2}{\beta_2}$

2. **Principio di eliminazione degli infinitesimi**

   Siano $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ funzioni infinitesime per *x* tendente a x_0.
   Se sono vere le seguenti condizioni:
   - esiste $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$,
   - γ e δ sono di *ordine inferiore* rispettivamente ad α e β,

   allora: $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$.

Per gli infiniti valgono due teoremi del tutto analoghi, la cui formulazione si lascia al lettore.