Introduzione alle funzioni goniometriche

Danilo Saccoccioni

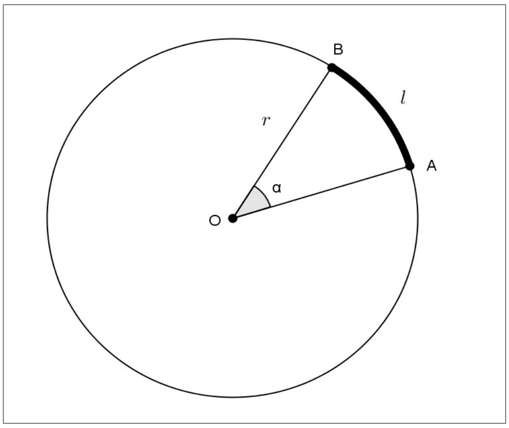


Figura 1. La figura mostra gli elementi geometrici necessari per definire la misura di una angolo α in radianti.

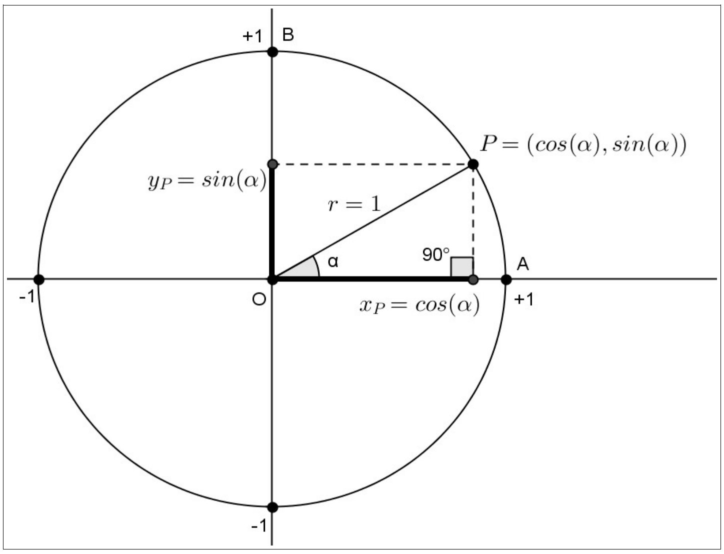


Figura 2. Definizione delle funzioni goniometriche seno e coseno sulla circonferenza goniometrica.

In una circonferenza di raggio *r* (figura 1), si fissino un angolo al centro α e il corrispondente arco *l*; sussiste una doppia proporzionalità:

- *l* è proporzionale al raggio *r*;
- *l* è proporzionale all'angolo α.

Questa doppia proporzionalità giustifica la seguente definizione:

*Si chiama **misura in radianti di un angolo α** il rapporto fra l'arco l e il raggio r* : $\boxed{\alpha_{rad} = \frac{l}{r}}$

E' immediato ricavare la misura dell'angolo giro in radianti: $Angolo\,giro = \frac{Circonferenza}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Quindi l'angolo piatto equivale a π radianti e l'angolo retto a $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Inoltre, grazie alla suddetta proporzionalità, è possibile stabilire un'equivalenza fra le misure in gradi e in radianti attraverso la seguente proporzione: $\boxed{\frac{\alpha°}{180°} = \frac{a_{rad}}{\pi}}$.

<u>ESERCIZI</u>

1. Attraverso la precedente formula e con l'ausilio della calcolatrice verifica la corrispondenza delle seguenti misure in gradi e in radianti:

Angolo in gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Angolo in radianti	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	$\pi \approx 3{,}14$	$\frac{3}{2}\pi \approx 4{,}71$	$2\pi \approx 6{,}28$

2. Trasforma le misure dei seguenti angoli in radianti: 15° 20° -45° -120° 150° 50,85° 36,976°

3. Le misure indicate di seguito sono espresse in radianti, trasformale in gradi: 0,189 -2,3 $\pi/5$ $\frac{5}{6}\pi$ $-\pi/2$ 1

La figura 2 illustra le definizioni delle funzioni goniometriche seno e coseno di una angolo α:

Data una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine di un sistema cartesiano (*<u>circonferenza goniometrica</u>*) e dato un punto $P(x_P, y_P)$ su di essa, si consideri l'angolo al centro α (orientato) avente come primo lato il semiasse positivo delle *x* e come secondo lato la semiretta *OP*.

- Si chiama **coseno** dell'angolo α **l'ascissa** di *P*: $x_P = \cos(\alpha)$ (NON E' UN PRODOTTO!!)
- Si chiama **seno** dell'angolo α **l'ordinata** di *P*: $y_P = \sin(\alpha)$

Con la calcolatrice puoi calcolare seno e coseno di un angolo utilizzando i tasti sin e cos. Inoltre puoi lavorare sia in gradi (sul quadrante è scritto DEG oppure D; non confonderti con GRAD, che significa un'altra cosa) sia in radianti (RAD oppure R). Se invece conosci il valore di seno o coseno e vuoi calcolare il corrispondente angolo, devi utilizzare i tasti per l'arcoseno e l'arcocoseno (le necessarie precisazioni sono rimandate al docente).

ESERCIZI

4. Mediante semplicissime considerazioni geometriche è possibile ricavare i seguenti valori (**il contenuto della seguente tabella deve essere conosciuto a memoria!!**):

Angolo in gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Angolo in radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
COSENO	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
SENO	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

5. Calcola seno e coseno degli angoli dell'esercizio 2 (prima imposta la calcolatrice su DEG oppure D).
6. Calcola seno e coseno degli angoli dell'esercizio 3 (prima imposta la calcolatrice su RAD o R; in alternativa puoi trasformare gli angoli in gradi e poi lavorare in DEG).

Dalla figura 2 si ottiene immediatamente la seguente proprietà, applicando il teorema di Pitagora al triangolo evidenziato:

Prima relazione fondamentale della goniometria

Per qualsiasi angolo α (anche negativo), vale la formula: $[\cos(\alpha)]^2+[\sin(\alpha)]^2=1$

che più comunemente viene scritta: $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

La precedente formula ci consente di ricavare il valore di $\sin(\alpha)$ o di $\cos(\alpha)$ se si conosce il valore assunto dall'altra funzione (basta risolvere un'equazione di II grado!).

Nelle applicazioni matematiche e fisiche è inoltre fondamentale il seguente teorema:

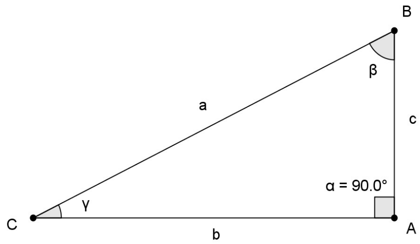
Teorema sui triangoli rettangoli

(*La dimostrazione, immediata, si ottiene mediante i criteri di similitudine ed è lasciata per esercizio*)

In un triangolo rettangolo un cateto qualsiasi è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, oppure per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente:

$$c=a\cdot\sin(\gamma)=a\cdot\cos(\beta)$$

$$b=a\cdot\sin(\beta)=a\cdot\cos(\gamma)$$



Ovviamente nei casi pratici i nomi dei vertici, dei lati e degli angoli possono cambiare rispetto a quanto indicato nella figura, pertanto lo studente è invitato a capire bene l'enunciato del teorema.
Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare i valori di tutti i sei elementi (tre lati e tre angoli) dati i valori di tre di essi (di cui almeno uno sia un lato). In pratica per risolvere un triangolo rettangolo (esercizio 7 – vedi sotto) è possibile applicare:

- Il teorema di Pitagora
- Il teorema sui triangoli rettangoli (sopra enunciato)
- La proprietà degli angoli di un triangolo, la cui somma è sempre un angolo piatto

Vettori sul piano cartesiano – Componenti cartesiane di un vettore

Si consideri il piano cartesiano *Oxy*. Si chiamano **versori coordinati** i due vettori di modulo 1 aventi lo stesso verso degli assi cartesiani. Indicheremo i versori coordinati con i simboli $\hat{x}_0$ e $\hat{y}_0$.
Se ora consideriamo un vettore qualsiasi $\vec{v}$ sul piano cartesiano, è evidente che esso può essere scomposto lungo le due direzioni degli assi, dunque è possibile scrivere:

$\boxed{\vec{v}=v_x\,\hat{x}_0+v_y\,\hat{y}_0}$ (N.B. Si tratta di una somma vettoriale fra il vettore $v_x\,\hat{x}_0$ e il vettore $v_y\,\hat{y}_0$)

dove v_x e v_y si chiamano **componenti cartesiane** del vettore $\vec{v}$ (figura 3) e corrispondono alle coordinate di P , quindi possono anche essere negative:

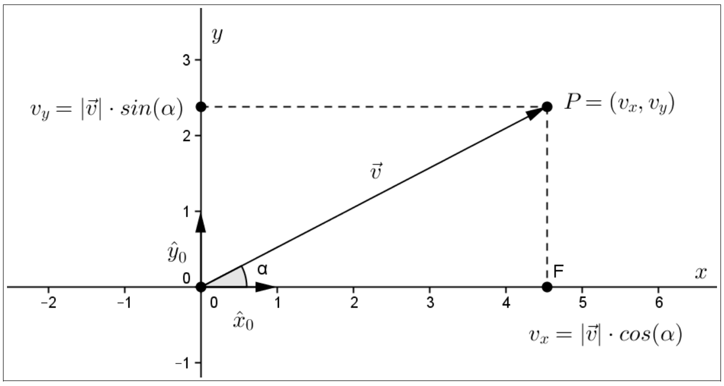
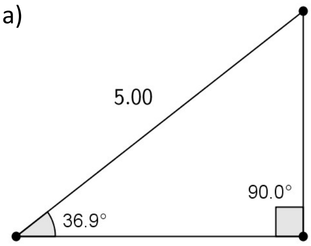


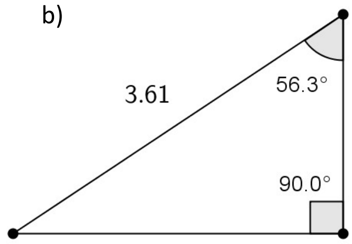
Figura 3. Componenti cartesiane di un vettore.

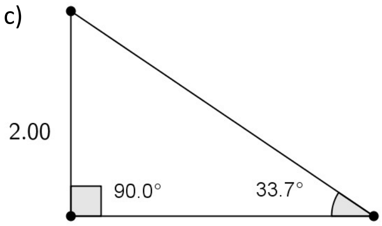
E' molto utile la rappresentazione mediante componenti cartesiane: in tal modo, infatti, è molto semplice eseguire materialmente le operazioni con i vettori.

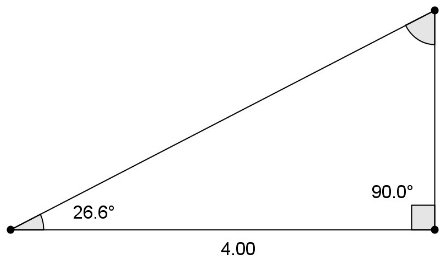
ESERCIZI

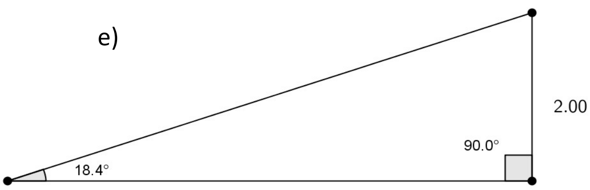
7. Dei seguenti triangoli calcola gli elementi incogniti (lati e angoli):

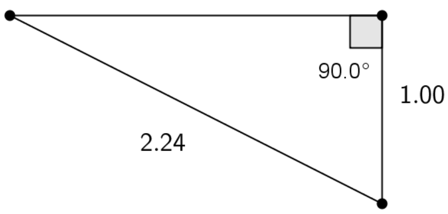
a)


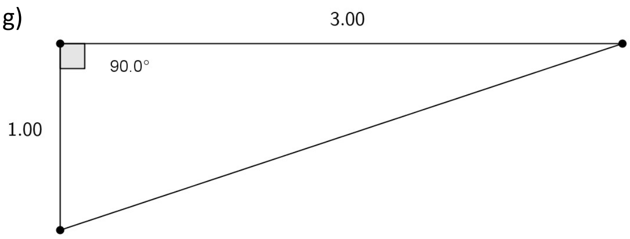
b)


c)


d)


e)


f)


g)


8. Rappresenta sul piano cartesiano i vettori indicati e svolgi le operazioni indicate (rappresenta anche i risultati sul piano):

a) $\vec{v}_1=2\hat{x}_0+3\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=3\hat{x}_0-\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_2=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_3=\vec{v}_2-\vec{v}_1$

b) $\vec{v}_1=-2\hat{x}_0+\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=2\hat{x}_0-4\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_2=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_3=\vec{v}_2-\vec{v}_1$

c) $\vec{v}_1=-3\hat{x}_0+4\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=3\hat{x}_0-4\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_2=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_3=\vec{v}_2-\vec{v}_1$

d) Un vettore sul piano cartesiano ha modulo 3,5 e forma un angolo di 25° con il semiasse positivo delle ascisse; scrivi l'espressione del vettore sul piano.

e) Un vettore sul piano cartesiano ha modulo 10 e forma un angolo di 125° con il semiasse positivo delle ascisse; scrivi l'espressione del vettore sul piano.

f) Quanto vale l'angolo che il vettore $\vec{v}=2\hat{x}_0+3\hat{y}_0$ forma con il semiasse positivo delle ascisse?

g) $\vec{v}_1=2\hat{x}_0+3\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=3\hat{x}_0-\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=2\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_2=3\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_3=-2\cdot\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_4=-\vec{v}_1$

h) $\vec{v}_1=-2\hat{x}_0+\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=2\hat{x}_0-4\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=2{,}4\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_2=-0{,}8\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_3=3{,}2\cdot\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_4=-\vec{v}_1$

i) $\vec{v}_1=-3\hat{x}_0+4\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=3\hat{x}_0-4\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=\frac{8}{5}\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_2=-\frac{3}{2}\cdot\vec{v}_1$ $\quad \vec{w}_3=\frac{1}{3}\cdot\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_4=-\frac{1}{2}\vec{v}_1$

j) $\vec{v}_1=2\hat{x}_0+3\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=3\hat{x}_0-\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=2\vec{v}_1+3\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_2=-3\vec{v}_1+\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_3=-\vec{v}_2+\frac{3}{2}\vec{v}_1$

k) $\vec{v}_1=-2\hat{x}_0+\hat{y}_0$ $\quad \vec{v}_2=2\hat{x}_0-4\hat{y}_0$; Calcola e rappresenta: $\vec{w}_1=\frac{2}{3}\vec{v}_1+2\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_2=-3\vec{v}_1+0{,}5\vec{v}_2$ $\quad \vec{w}_3=-\vec{v}_2+\frac{3}{2}\vec{v}_1$

RISPOSTE AD ALCUNI ESERCIZI

2. a) $\frac{\pi}{12}\approx 0{,}26$ b) $\frac{\pi}{9}\approx 0{,}35$ d) $\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}09$ e) 0,887

3. a) 10,8° c) 36°

5. a) $\sin(15°)\approx 0{,}259$; $\cos(15°)\approx 0{,}966$ (prova a verificare anche che $\sin^2(15°)+\cos^2(15°)=1$)
c) $\sin(-45°)\approx -0{,}707$; $\cos(-45°)\approx 0{,}707$ (prova a verificare anche che $\sin^2(-45°)+\cos^2(-45°)=1$)

6. a) $\sin(0{,}189)\approx 0{,}188$; $\cos(0{,}189)\approx 0{,}982$ (prova a verificare anche che $\sin^2(0{,}189)+\cos^2(0{,}189)=1$)
c) $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx 0{,}188$; $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx 0{,}809$ (prova a verificare anche che $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$)

7. Gli elementi incogniti misurano:
a) cateti: 3,00 4,00 angolo: 53,1°
b) cateti: 2,00 3,00 angolo: 33,7°
c) cateto: 3,00 ipotenusa: 3,61 angolo: 56,3°
d) cateto: 2,00 ipotenusa: 4,47 angolo: 63,4°
e) cateto: 6,00 ipotenusa: 6,32 angolo: 71,6°
f) cateto: 2,00 angoli: 63,4° 26,6°
g) ipotenusa: 3,16 angoli: 18,4° 71,6°

8. d) $\vec{v}=3{,}17\hat{x}_0+1{,}48\hat{y}_0$
e) $\vec{v}=-5{,}74\hat{x}_0+8{,}19\hat{y}_0$
f) 56,3°