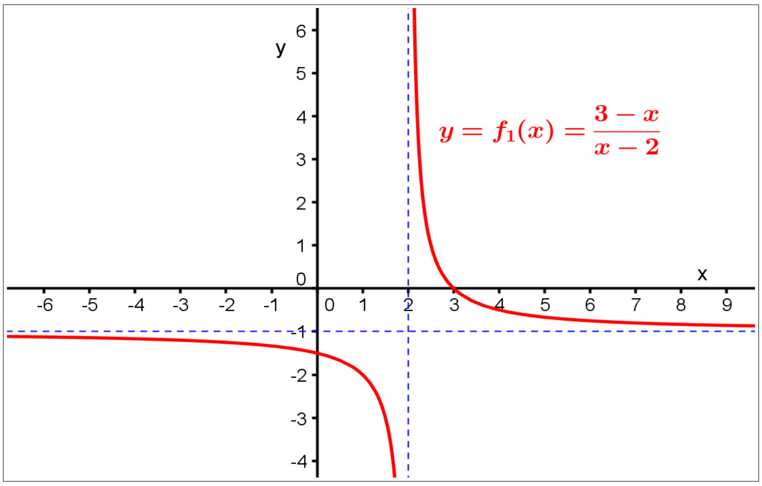
Introduzione alla Teoria dei Limiti

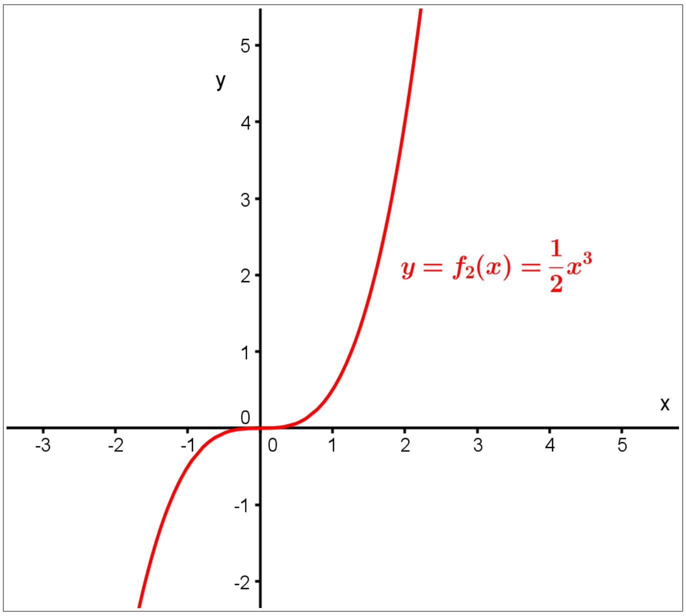
prof. Danilo Saccoccioni

L'analisi matematica classica prende le mosse dalla nozione di limite. Inizialmente la presentazione sarà del tutto informale e qualitativa, poi nelle pagine seguenti i concetti introdotti verranno precisati attraverso definizioni più rigorose.
Si parla di *limite* quando si vuole *studiare il comportamento di una funzione* $y=f(x)$ *quando la x è prossima ad un certo valore* x_0 *oppure quando la x tende a crescere verso l'infinito*. Studiare un limite, quindi, non significa sapere quanto vale una funzione in un certo punto, ma significa capire cosa succede *nei pressi* di quel punto. Di seguito illustriamo quanto detto attraverso qualche esempio.

Consideriamo le due seguenti funzioni: $y=f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$, $y=f_2(x)=\dfrac{1}{2}x^3$.

Costruiamone, ora, il grafico cartesiano per punti (per esempio con l'ausilio di una tabella); si ottengono andamenti del genere:





Si provi, ora, a rispondere alle seguenti domande, osservando i precedenti grafici:

1. Relativamente alla funzione f_1:
   a. Quando x **<u>tende</u>** a crescere indefinitamente (ciò si esprime dicendo che la x tende a più infinito, in simboli $x\to+\infty$), cosa succede alla y (ovvero alla funzione f_1)?
   b. Quando x **<u>tende</u>** a decrescere indefinitamente (ciò si esprime dicendo che la x tende a meno infinito, in simboli $x\to-\infty$), cosa succede alla f_1 ?
   c. Quando x **<u>tende</u>** ad avvicinarsi a zero, cosa succede alla funzione? E quando invece **<u>tende</u>** ad avvicinarsi al punto $x_0=-3$?
   d. Quando x **<u>tende</u>** ad avvicinarsi al punto $x_0=2$, cosa succede alla funzione?
2. Relativamente alla funzione f_2 rispondere alle stesse domande a, b, c, d.

Tentiamo una risposta alle precedenti domande, risposta che per ora sarà solo qualitativa e ottenuta per ispezione visiva dei grafici:

1. Relativamente alla funzione f_1:
   a. A mano a mano che la x cresce, la y tende ad avvicinarsi al valore –1. Ciò in matematica si scrive così: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x-2}=-1}$, espressione che si legge nel seguente modo: *il limite per x tendente a più infinito della funzione* $f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ *è uguale a* –1.
   b. A mano a mano che la x decresce, la y tende ad avvicinarsi ancora una volta al valore –1. Ciò in matematica si scrive così: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3-x}{x-2}=-1}$, espressione che si legge nel seguente modo: *il limite per x tendente a meno infinito della funzione* $f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ *è uguale a* –1.
   c. Quando la x tende ad avvicinarsi al valore zero, è ovvio che la y tende ad avvicinarsi al valore $-\dfrac{3}{2}$. Invece quando la x tende ad avvicinarsi al valore $x_0=-3$, la y tende ad avvicinarsi al valore $-\dfrac{6}{5}$. Questi due fatti si esprimono rispettivamente con le formule: $\boxed{\lim_{x\to0}\dfrac{3-x}{x-2}=-\dfrac{3}{2}}$, $\boxed{\lim_{x\to-3}\dfrac{3-x}{x-2}=-\dfrac{6}{5}}$. La prima si legge così: *il limite per x tendente a zero della funzione*

$f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ *è uguale a meno tre mezzi*. Analogamente si legge la seconda.

d. La risposta alla domanda d richiede di analizzare due sotto-casi:

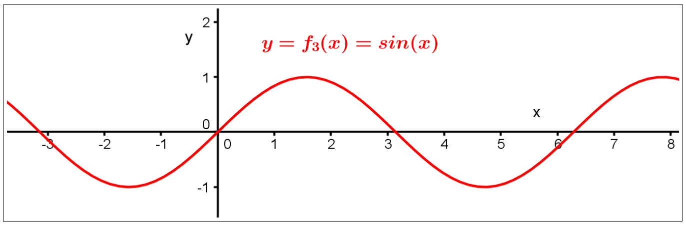
1. Se x tende ad avvicinarsi al valore 2 da destra, allora la funzione tende a crescere indefinitamente (tende a più infinito); ciò si scrive così: $\boxed{\lim_{x\to 2^+}\dfrac{3-x}{x-2}=+\infty}$, che si legge: *il limite **destro** per x tendente a 2 della funzione* $f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ *è uguale a più infinito*.
2. Se x tende ad avvicinarsi al valore 2 da sinistra, allora la funzione tende a decrescere indefinitamente (tende a meno infinito); ciò si scrive così: $\boxed{\lim_{x\to 2^-}\dfrac{3-x}{x-2}=-\infty}$, che si legge: *il limite **sinistro** per x tendente a 2 della funzione* $f_1(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ *è uguale a meno infinito*.

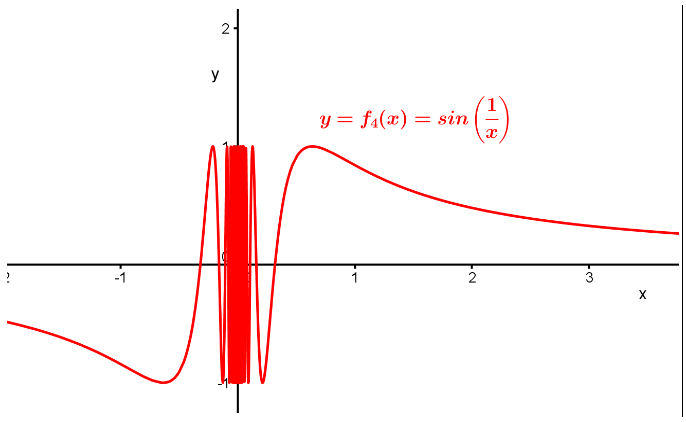
2. Relativamente alla funzione f_1: provare di nuovo per conto proprio, secondo quanto appena illustrato.

La cosa sembra semplice, ma si provi ora a rispondere alle medesime domande relativamente a queste altre due funzioni:

$$y=f_3(x)=\sin(x), \qquad y=f_4(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

I grafici qualitativi, che possono essere costruiti approssimativamente per punti, sono i seguenti:





Ci si rende facilmente conto che i seguenti limiti **non possono esistere**: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sin(x)}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sin(x)}$ e $\boxed{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$, infatti l'andamento delle funzioni nei tre casi è oscillante, pertanto non ha senso chiedersi a quale valore tenda la funzione!!

I concetti appena introdotti meritano molte precisazioni: cosa vuole dire esattamente che una certa funzione tende ad un certo valore? Cosa vuol dire "infinito"? Come distinguere un limite destro da uno sinistro?

Per rispondere adeguatamente, conviene enumerare tutti i casi possibili:

1. il limite non esiste;
2. il limite esiste e la x può tendere a un valore x_0 finito, a più infinito ($+\infty$) o a meno infinito ($-\infty$);
3. il limite esiste e la y (cioè la funzione $f(x)$) può tendere a un valore l finito, a più infinito ($+\infty$) o a meno infinito ($-\infty$).

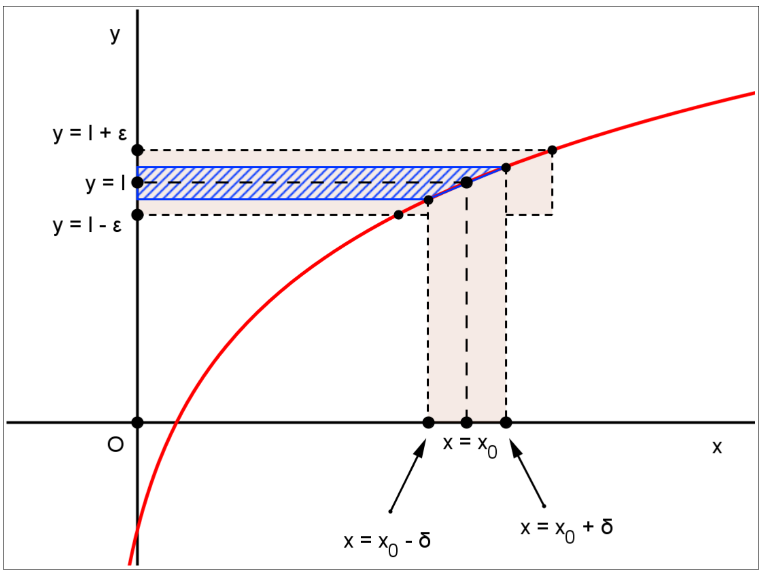
Escludendo il caso 1, abbiamo in tutto nove casi, espressi dalle varie combinazioni dei casi 2 e 3:

- **CASO 1**
  - x tende a un valore x_0 finito
  - $f(x)$ tende a un valore l finito

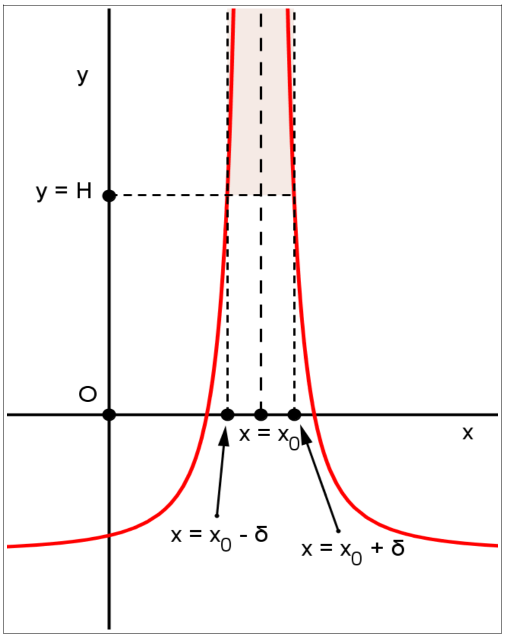
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende ad avvicinarsi al valore x_0 finito, la funzione tende al valore l finito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I del numero l è possibile determinare un intorno J del numero x_0 in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J (escludendo x_0) sono contenute in I (vedere figura a lato).



- **CASO 2**
  - x tende a un valore x_0 finito
  - $f(x)$ tende a più infinito

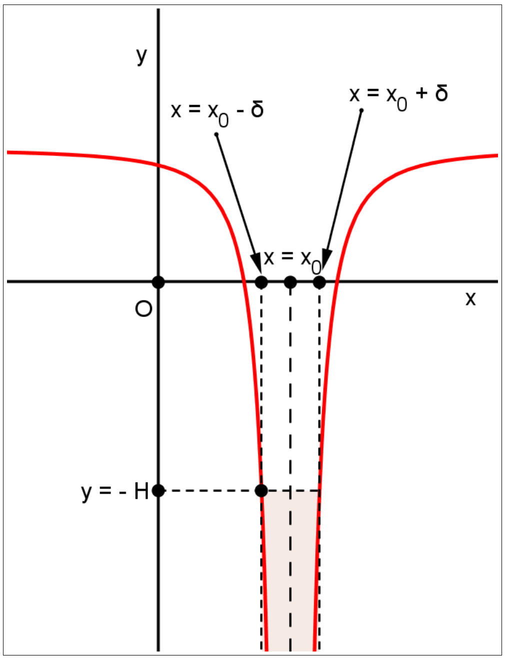


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende ad avvicinarsi al valore x_0 finito, la funzione tende a più infinito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $+\infty$ è possibile determinare un intorno J del numero x_0 in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J (escludendo x_0) sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 3**
  - x tende a un valore x_0 finito
  - $f(x)$ tende a meno infinito

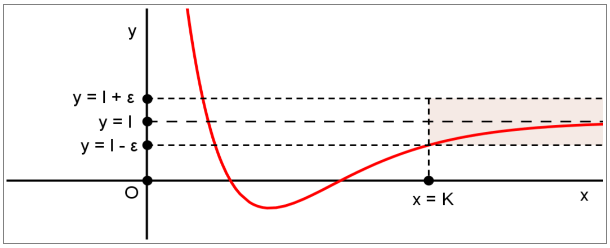


$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende ad avvicinarsi al valore x_0 finito, la funzione tende a meno infinito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $-\infty$ è possibile determinare un intorno J del numero x_0 in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J (escludendo x_0) sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 4**
  - x tende a più infinito
  - $f(x)$ tende a un valore l finito

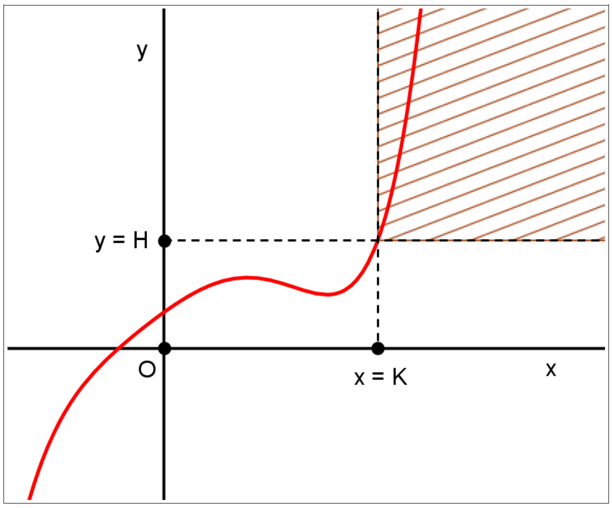


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a più infinito, la funzione tende al valore finito l.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di l è possibile determinare un intorno J di $+\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 5**
  - x tende a più infinito
  - $f(x)$ tende a più infinito

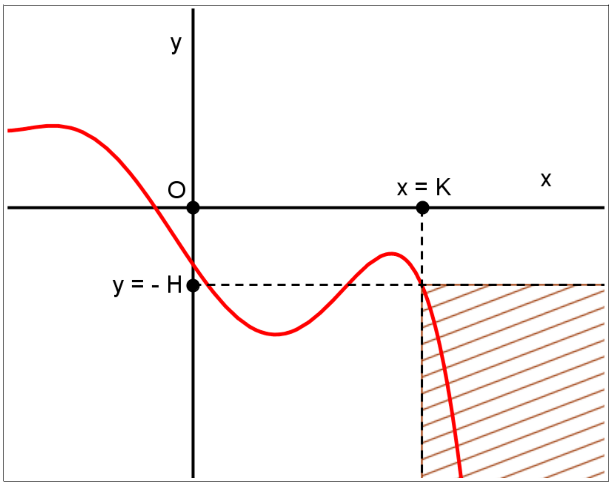


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a più infinito, la funzione tende a più infinito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $+\infty$ è possibile determinare un intorno J di $+\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 6**
  - x tende a più infinito
  - $f(x)$ tende a meno infinito

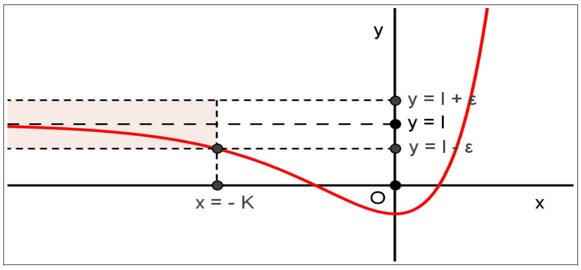


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a più infinito, la funzione tende a meno infinito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $-\infty$ è possibile determinare un intorno J di $+\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 7**
  - x tende a meno infinito
  - $f(x)$ tende a un valore l finito

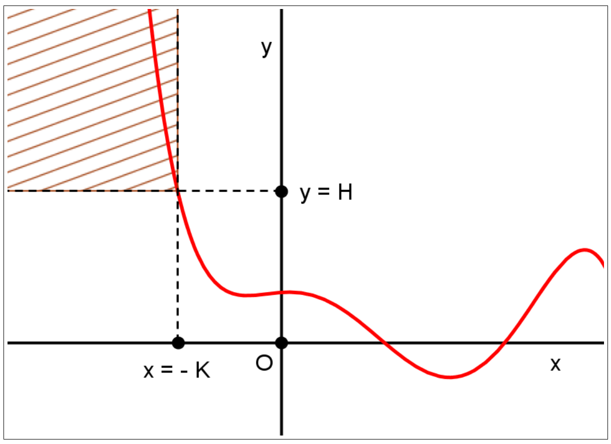


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a meno infinito, la funzione tende al valore finito l.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di l è possibile determinare un intorno J di $-\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 8**
  - x tende a meno infinito
  - $f(x)$ tende a più infinito



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a meno infinito, la funzione tende a più infinito.

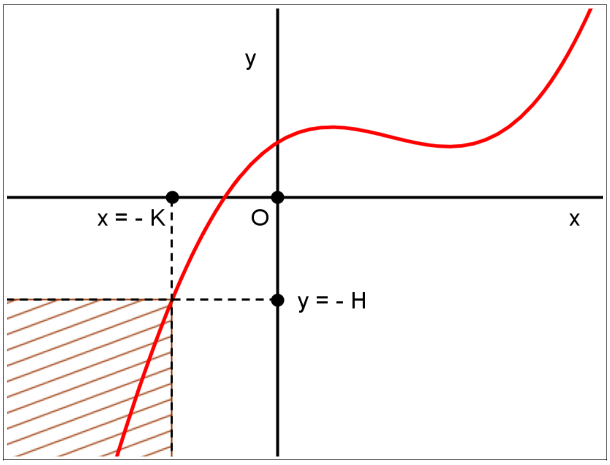
Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $+\infty$ è possibile determinare un intorno J di $-\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).

- **CASO 9**
    - x tende a meno infinito
    - $f(x)$ tende a meno infinito

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ciò si esprime dicendo che quando x tende a meno infinito, la funzione tende a meno infinito.

Dire che il limite esiste significa in questo caso affermare che comunque si fissi un intorno I di $-\infty$ è possibile determinare un intorno J di $-\infty$ in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J sono contenute in I (vedere figura a lato).



LIMITI DESTRO E SINISTRO

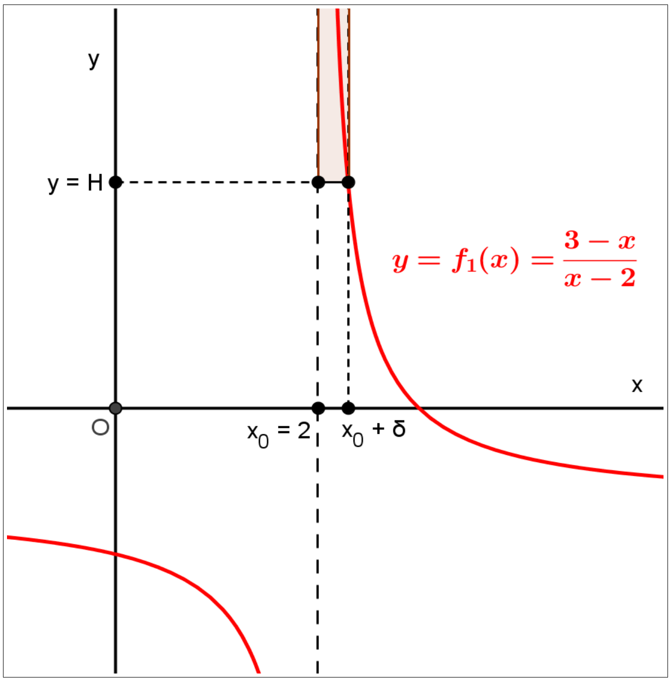
Nei casi 1, 2 e 3 si è parlato di intorno J del numero x_0; ovviamente qualora interessi studiare solo ciò che succede *a destra* di x_0 (cioè per valori x maggiori di x_0) J sarà un *intorno destro*. Il tutto viene indicato simbolicamente con le formule seguenti, del tutto simili a quelle riportate nei casi 1, 2 e 3, denotanti **limiti destri**:

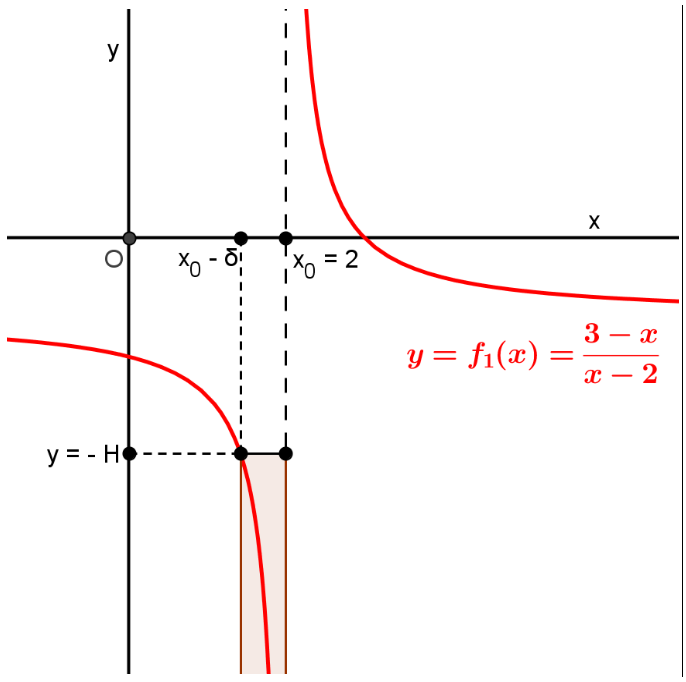
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

In modo del tutto simile si parla di **limiti sinistri** quando si fa riferimento a intorni J sinistri:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

A mo' di esempio torniamo ancora sulla funzione $y = f_1(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$ analizzata qualitativamente all'inizio di questa dispensa; le due seguenti figure illustrano il gli intorni da considerare rispettivamente per il limite destro e il limite sinistro:





Dunque scrivere $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3-x}{x-2} = +\infty$ significa che per ogni intorno I di $+\infty$ è possibile determinare un <u>**intorno destro**</u> J del numero x_0 in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J (escludendo x_0) sono contenute in I (figura precedente a sinistra).

Invece scrivere $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{3-x}{x-2} = +\infty$ significa che per ogni intorno I di $-\infty$ è possibile determinare un <u>**intorno sinistro**</u> J del numero x_0 in modo che le immagini di tutti i numeri x compresi in J (escludendo x_0) sono contenute in I (figura precedente a destra).

Dopo la presentazione delle pagine precedenti possiamo finalmente enunciare una definizione generale di limite, valida per funzioni definite su intervalli e che comprende tutti i nove casi illustrati; affinché la definizione che segue possa effettivamente contemplare tutti i nove casi, è necessario che

- il simbolo x_0 possa rappresentare sia numeri sia i simboli di $+\infty$ e $-\infty$;
- il simbolo l possa rappresentare sia numeri sia i simboli di $+\infty$ e $-\infty$.

DEFINIZIONE GENERALE DI LIMITE PER FUNZIONI DEFINITE SU INTERVALLI

Sia $f: A \rightarrow R$ una funzione numerica definita su un intervallo (o insieme di intervalli) A e sia x_0 un punto interno ad A oppure un suo estremo (eventualmente $\pm\infty$). Si dice che la funzione f tende verso l (che può essere un numero reale o $\pm\infty$) se per ogni intorno I di l è possibile determinare un intorno J di x_0 in modo tale che si abbia:

$\forall x \in A \cap J - \{x_0\} \quad \rightarrow \quad f(x) \in I$ (cioè le immagini di tutti i numeri x di J (escluso x_0) sono in I).

Ricordiamo che un intorno è un intervallo e un intervallo può essere individuato mediante opportune disequazioni, pertanto la definizione precedente può essere tradotta in modo diverso, per ciascuno dei nove casi studiati, facendo uso delle disequazioni:

CASO 1	- x_0 finito - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \rightarrow \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
CASO 2	- x_0 finito - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \rightarrow \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
CASO 3	- x_0 finito - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \rightarrow \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
CASO 4	- x_0 vale $+\infty$ - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \rightarrow \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
CASO 5	- x_0 vale $+\infty$ - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \rightarrow \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CASO 6	- x_0 vale $+\infty$ - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \rightarrow \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
CASO 7	- x_0 vale $-\infty$ - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \rightarrow \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$
CASO 8	- x_0 vale $-\infty$ - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \rightarrow \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
CASO 9	- x_0 vale $-\infty$ - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \rightarrow \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ovviamente le definizioni andranno adattate nel caso di **limiti destro/sinistro**. Ad esempio il caso 1 si sdoppia così:

CASO 1a **Lim. DX**	- x_0 finito - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite **destro** il numero l per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in]x_0, x_0+\delta) \quad \rightarrow \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
CASO 1b **Lim. SX**	- x_0 finito - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite **sinistro** il numero l per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0[\quad \rightarrow \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Provare per esercizio a "sdoppiare" i casi 2 e 3: si tratta di scrivere correttamente l'intervallo di riferimento. Ovviamente per i casi dal 4 al 9 non ha senso parlare di limite destro e limite sinistro.

Esercizio1 *Verificare se la scrittura* $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$ *è corretta.*

Occorre fissare un numero positivo arbitrario ε ("piccolo a piacere", perché questo è il senso limite) e controllare che le soluzioni dell'equazione $\lvert x^3 - 8 \rvert < \varepsilon$ costituiscono un intorno del numero 2.

Esercizio2 *Controllare che il limiti delle funzioni f_3 e f_4 di pagina 2 effettivamente non esistono secondo le definizioni date.*

Tenendo presenti le proprietà fondamentali delle funzioni elementari e dei loro grafici, possiamo scrivere:

1. Funzione potenza $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty \text{ , se } n \text{ è intero positivo dispari}\\ +\infty \text{ , se } n \text{ è intero positivo pari}\end{cases}$

   $\lim_{x\to+\infty} x^r=+\infty$, se r è un numero ***reale positivo*** qualsiasi;

   $\lim_{x\to0^+} x^r=0$, se r è un numero ***reale positivo*** qualsiasi

2. Funzione radice $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$, se n è intero positivo ***dispari***.

3. Funzione esponenziale $\lim_{x\to-\infty} a^x=\begin{cases}0 \text{ , se } a>1\\ +\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}+\infty \text{ , se } a>1\\ 0 \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$

4. Funzione logaritmo $\lim_{x\to0^+}\log_a(x)=\begin{cases}-\infty \text{ , se } a>1\\ +\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty}\log_a(x)=\begin{cases}+\infty \text{ , se } a>1\\ -\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$

5. Funzione tangente $\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}\right]^+}\tan(x)=-\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^+}\tan(x)=-\infty$

   $\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}\right]^-}\tan(x)=+\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^-}\tan(x)=+\infty$

   (Per la cotangente?)

6. Inverse delle funzioni circolari: $\lim_{x\to[-1]^+}\arcsin(x)=-\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to1^-}\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

   $\lim_{x\to[-1]^+}\arccos(x)=\pi$ $\lim_{x\to1^-}\arccos(x)=0$

   $\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$

TEOREMI SUI LIMITI

Alcuni importanti teoremi permettono lo sviluppo della teoria e del calcolo dei limiti:

- teorema di unicità del limite;
- teorema di permanenza del segno;
- teorema del confronto;
- teorema delle operazioni.

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se esiste il limite l (finito o infinito) della funzione per x tendente a x_0 (finito o infinito), tale limite è unico.

Il teorema attesta che se il limite esiste, esso è unico in ciascuno dei nove casi possibili analizzati.

DIMOSTRAZIONE

Il teorema si dimostra per assurdo. Si immagini che esistano due diversi limiti: $l_1=\lim_{x\to x_0} f(x)$, $l_2=\lim_{x\to x_0} f(x)$, con $l_1\neq l_2$.

Applicando la definizione di limite ai due limiti precedenti, possiamo asserire quanto segue:

- comunque si fissi un intorno I_1 di l_1 esiste un intorno J_1 di x_0 tale che per ogni x appartenente a J_1 (escluso x_0) $f(x)\in I_1$;
- comunque si fissi un intorno I_2 di l_2 esiste un intorno J_2 di x_0 tale che per ogni x appartenente a J_2 (escluso x_0) $f(x)\in I_2$.

Ora, se I_1 e I_2 vengono presi disgiunti, le precedenti affermazioni garantiscono che se x appartiene a $J_1\cap J_2$ (escluso x_0) i valori assunti dalla funzione $f(x)$ devono appartenere contemporaneamente ad I_1 e ad I_2 , ma ciò è assurdo. Pertanto il limite deve essere unico.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Se il limite l (finito o infinito) della funzione per x tendente a x_0 (finito o infinito) esiste ed è diverso da zero, allora esiste un intorno J di x_0 in ogni punto del quale (escludendo x_0) la funzione assume lo stesso segno del suo limite.

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è immediata: discende direttamente dalla definizione di limite. Basta fissare un intorno I di l formato solo da valori dello stesso segno.

TEOREMA DI CONFRONTO (O DEI DUE CARABINIERI)

Se $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ sono tre funzioni definite nello stesso intervallo (eccettuato al più il numero x_0) e se per ogni x risulta

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$$

e se, inoltre, è

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l \quad \text{(finito o infinito)}$$

allora risulta anche

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=l$$

DIMOSTRAZIONE

Anche in questo caso la dimostrazione discende dalla definizione. Se si fissa un intorno arbitrario I di l, esiste per le ipotesi poste un opportuno intorno J di x_0 in ogni punto del quale (ad esclusione di x_0) risultano contemporaneamente vere le seguenti:

$$\begin{cases} f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x) \\ f(x)\in I \\ g(x)\in I \end{cases}$$

da cui segue immediatamente $h(x)\in I$. Vista l'arbitrarietà di I, è immediata la tesi.

TEOREMA DELLE OPERAZIONI SUI LIMITI

Esistano i due limiti $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=l_2$, con x_0 finito o infinito. Si ha:

- se l_1 e l_2 sono numeri (cioè valori finiti) allora
  1. $\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\pm f_2(x)]=l_1\pm l_2$
  2. $\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=l_1\cdot l_2$
  3. $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}$ purché $l_2\neq 0$
  4. se $l_1\neq 0$, $l_2=0$ e $f_2(x)\neq 0$ in un intorno di x_0, allora
     $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$, ove il segno va studiato tenendo conto dei segni delle due funzioni.
  5. $\lim_{x\to x_0}|f_1(x)|=|l_1|$ (idem per l'altra funzione)
- se uno o entrambi i limiti l_1 e l_2 sono infiniti, le operazioni sono possibili solo in alcuni casi, riassunti simbolicamente dalla seguente tabella – **NB**: *k è un numero, inoltre continua a valere la regola dei segni*.

$k\pm\infty=\pm\infty$	$+\infty+\infty=+\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$	
$k\cdot\infty=\infty$, $k\neq 0$	$\frac{k}{\infty}=0$	$\frac{\infty}{k}=\infty$, $k\neq 0$	$\infty\cdot\infty=\infty$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo solo la relazione 1 relativa al caso in cui l_1 e l_2 siano numeri (cioè valori finiti). Le dimostrazioni delle altre formule si svolgono in maniera analoga.
Fissiamo un numero positivo ε arbitrario. In corrispondenza di tale valore esiste un intorno *J* di x_0 in ogni punto del quale (escludendo al più x_0) si ha:

$$\begin{cases} |f_1(x)-l_1|<\varepsilon \\ |f_2(x)-l_2|<\varepsilon \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere la seguente catena, che sfrutta la disuguaglianza triangolare:

$$|f_1(x)+f_2(x)-(l_1+l_2)|=|f_1(x)+f_2(x)-l_1-l_2|=|f_1(x)-l_1+f_2(x)-l_2|<|f_1(x)-l_1|+|f_2(x)-l_2|<\varepsilon+\varepsilon=2\cdot\varepsilon$$

In definitiva:

$$|f_1(x)+f_2(x)-(l_1+l_2)|<2\cdot\varepsilon,$$ valida in ogni punto di *J* (escluso al più x_0).

Vista l'arbitrarietà di ε, sussiste il limite.

Il teorema delle operazioni sui limiti nulla permette di dire circa i seguenti casi, noti sotto il nome di **forme indeterminate**[1]:

$\infty-\infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\cdot\infty$

Per decidere le forme indeterminate, pertanto, occorre utilizzare particolari accorgimenti e teoremi più avanzati.

1 Esistono altre forme indeterminate, che di solito vengono introdotte più in là nel corso di Analisi: 0^0 1^∞ ∞^0