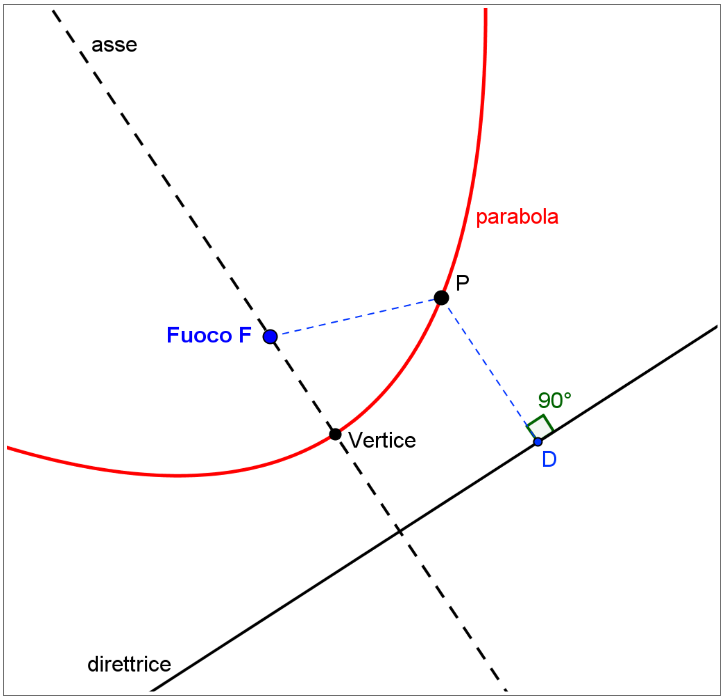
La Parabola sul Piano Cartesiano

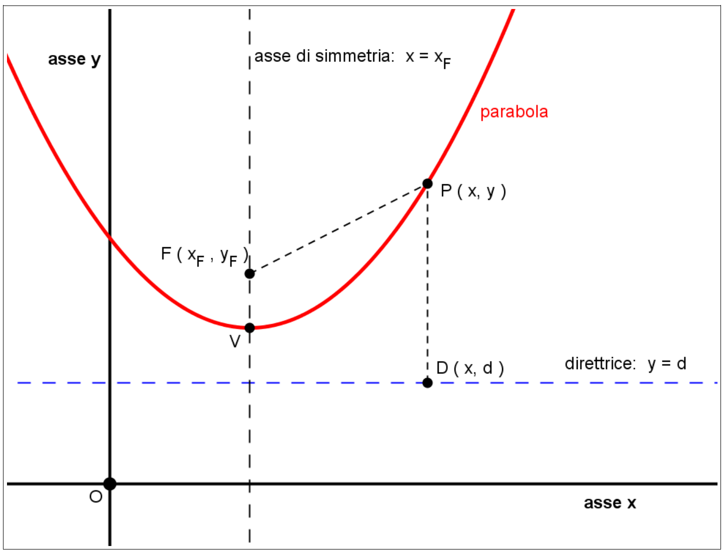
Prof. Danilo Saccoccioni

Si chiama *parabola* il luogo geometrico dei punti P del piano <u>equidistanti</u> da un punto F chiamato *fuoco* e da una retta chiamata *direttrice*.



Dunque il generico punto P della parabola ha la proprietà seguente: $\overline{PF} = \overline{PD}$

In varie situazioni è estremamente utile studiare la parabola sul piano cartesiano. Nelle applicazioni comuni è sufficiente studiare la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *y*.



Vogliamo ora dimostrare un teorema importante:

TEOREMA 1

Sul piano cartesiano una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha un'equazione di II grado $y=ax^2+bx+c$.

Ciò significa che il generico punto della parabola di coordinate $P=(x,y)$ soddisfa l'equazione di II grado $y=ax^2+bx+c$.
Per dimostrare il teorema, facciamo riferimento alla figura precedente.

Dimostrazione del teorema 1.

Per come è definita la parabola, possiamo scrivere $\overline{PF}=\overline{PD}$, cioè, sostituendo le coordinate dei vari punti:
$\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}=|y-d|$;
elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo ovviamente ancora un'uguaglianza: $(x-x_F)^2+(y-y_F)^2=(y-d)^2$;
sviluppando i quadrati: $x^2-2x_F x+x_F^2+y^2-2y_F y+y_F^2=y^2+d^2-2dy$;
semplificando y^2 e isolando il termine con *y*: $2(y_F-d)y=x^2-2x_F x+x_F^2+y_F^2-d^2$,
dunque: $y=\frac{1}{2(y_F-d)}x^2-\frac{x_F}{(y_F-d)}x+\frac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)}$,
che è appunto un'equazione di II grado del tipo $y=ax^2+bx+c$, dopo aver posto

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2(y_F-d)} \\ b=-\frac{x_F}{y_F-d} \\ c=\frac{x_F^2+y_F^2-d^2}{2(y_F-d)} \end{cases}$$

Ci si potrebbe chiedere se valga il teorema inverso, ovvero se una qualsiasi equazione di secondo grado del tipo $y=ax^2+bx+c$ corrisponda <u>sempre</u> ad un'opportuna parabola con asse parallelo all'asse *y*. La risposta è affermativa:

TEOREMA 2 (INVERSO DEL TEOREMA 1)

Sul piano cartesiano un'equazione di II grado $y=ax^2+bx+c$ *rappresenta <u>sempre</u> una parabola, comunque vengano scelti i coefficienti numerici a, b e c (purché* $a\neq 0$).

La dimostrazione del teorema è un puro esercizio di calcolo algebrico (solo un po' lungo) e consiste nel ricavare i dati fondamentali della parabola, cioè x_F, y_F e d ,a partire da arbitrari coefficienti *a*, *b* e *c*. Tale calcolo si può svolgere invertendo le ultime tre formule della precedente dimostrazione; ponendo $\Delta=b^2-4ac$ si ottiene:

Coordinate del fuoco F $x_F=-\frac{b}{2a}$ $y_F=\frac{-\Delta+1}{4a}$

Coordinate del vertice V $x_V=-\frac{b}{2a}$ $y_V=\frac{-\Delta}{4a}$

Equazione della direttrice $y=\frac{-\Delta-1}{4a}$ (ovviamente il secondo membro equivale a *d*)

Equazione dell'asse di simmetria $x=-\frac{b}{2a}$