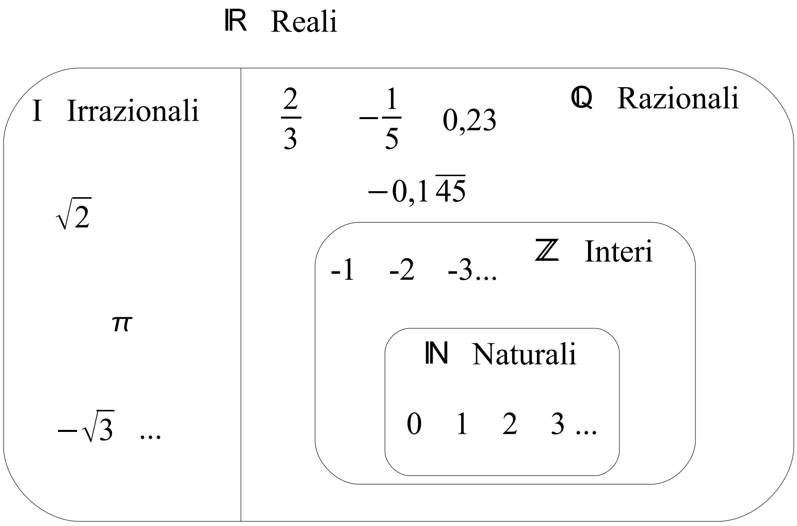
Breve introduzione a
POTENZE – FUNZIONI ESPONENZIALI

Classificazione dei numeri



- **Numeri naturali**: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3...\}$
- **Numeri interi**: $\mathbb{Z}=\{0,-1,\ 1,-2,\ 2,-3,\ 3...\}$
- **Numeri razionali**: $\mathbb{Q}=$ *frazioni positive e negative , compreso lo zero* (in realtà non è proprio così, ma per il momento a noi va bene).

  E' ben noto che le frazioni possono avere:
  - *rappresentazione decimale limitata*: per esempio $\frac{3}{100}=0{,}03$, $\frac{3}{5}=0{,}6$
  - *rappresentazione decimale illimitata periodica*: per esempio $\frac{2}{3}=0{,}\overline{6}$
- **Numeri irrazionali**: I = *numeri che non si possono esprimere come frazioni*

  E' ben noto che i numeri irrazionali hanno *rappresentazione decimale illimitata aperiodica*
- **Numeri reali**: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$ cioè l'unione dei razionali e degli irrazionali

Ovviamente:
- ogni numero naturale è anche intero
- ogni numero intero è anche razionale
- ogni numero razionale o irrazionale è un numero reale, pertanto i numeri reali sono tutti i numeri che noi conosciamo; i numeri reali, come sappiamo, possono essere rappresentati su una retta orientata (cioè su un asse cartesiano)

Potenze: definizioni e proprietà

Se n è un numero *naturale diverso da zero*, sappiamo dalla scuola media che, qualunque sia il numero a, si definisce potenza di base a ed esponente n il numero ottenuto come prodotto di n volte a, cioè:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \ volte}}$$

Si pone inoltre: $a^0 = 1$, purché $a \neq 0$.

Per le potenze ad esponente naturale, valgono le seguenti importanti proprietà, che si possono facilmente dimostrare con le proprietà della moltiplicazione e della divisione:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ con $n > m$
3. $a^n \cdot b^n = (a\,b)^n$
4. $a^n \div b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
5. $\left(a^n\right)^m = a^{n\,m}$

Come si vede, la proprietà n° 2 contiene la precisazione che $n > m$, perché altrimenti si otterrebbe un esponente negativo. Ci chiediamo: possiamo attribuire un significato ad una potenza ad esponente *negativo*, cioè al simbolo a^{-m} ? Ovviamente se a tale simbolo possiamo attribuire un significato, vogliamo che continuino a valere le cinque proprietà prima elencate. In particolare dovrà valere la n° 2, quindi, ponendo per esempio $n = 0$:

$$a^n \div a^m = a^0 \div a^m = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

Dunque, dalla precedente espressione: $a^{-m} = \dfrac{a^0}{a^m} = \dfrac{1}{a^m} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^m$

Deduciamo che, se vogliamo che continuino a valere le proprietà delle potenze, il significato da attribuire ad a^{-m} è necessariamente il seguente:

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m}$$

ESEMPI:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- Attenzione: $-2^4 = -(2)^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$, MA: $(-2)^4 = +16$
- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
- $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, MA: 0^0 e 0^{-3} non sono definiti (poiché si avrebbe la comparsa di uno zero al denominatore, che fa perdere di significato a tutta l'espressione.

Domanda: possiamo attribuire un significato ad una potenza ad esponente *razionale*, cioè ad una potenza che ha ad esponente una frazione, del tipo $a^{\frac{m}{n}}$?
Anche in questo caso, se effettivamente possiamo attribuire un significato, devono continuare a valere le stesse cinque proprietà elencate nella pagina precedente. Abbiamo

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m \quad , \quad \text{ma abbiamo anche:} \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m \quad ,$$

quindi, poiché abbiamo ottenuto lo stesso risultato, necessariamente occorrerà eguagliare le basi, pertanto:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \qquad \text{con} \quad a > 0 \quad \text{, poiché la radice deve essere sempre ben definita.}$$

ESEMPI:

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$
- $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$
- $3^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{3^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$
- $3^{0,\overline{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

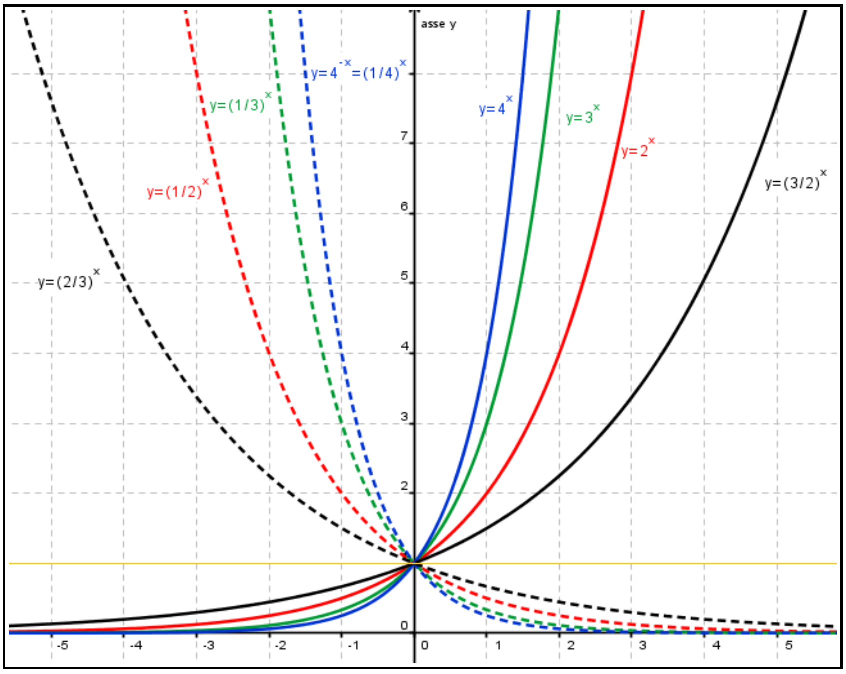
Domanda: possiamo attribuire un significato ad una potenza ad esponente *irrazionale*, cioè ad una potenza che ha ad esponente un numero irrazionale, come per esempio $3^{\sqrt{2}}$?
Anche in questo caso vogliamo che siano ancora valide, per potenze del genere, le solite cinque proprietà elencate nella pagina precedente. Un modo per poter definire tali potenze è quello di considerare approssimazioni razionali per difetto e per eccesso dell'esponente: riprendendo l'esempio di $3^{\sqrt{2}}$, consideriamo le approssimazioni per difetto e per eccesso di $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3^1 & & & & . & & & & 3^2 \\
& 3^{1,4} & & & . & & & 3^{1,5} & \\
& & 3^{1,41} & & . & & 3^{1,42} & & \\
& & & 3^{1,414} & . & 3^{1,415} & & & \\
& & & & \cdots & & & & \\
& & & & \cdots & & & & \\
& & & & 3^{\sqrt{2}} & & & &
\end{array}$$

Cioè $3^{\sqrt{2}}$ è l'*elemento di separazione* di una coppia di classi di numeri ottenute approssimano per difetto e per eccesso l'esponente $\sqrt{2}$. Il trucco di utilizzare approssimazioni per difetto e per eccesso di un numero irrazionale è sempre possibile, quindi il procedimento illustrato è generale, purché la base sia positiva.

Funzione esponenziale

Si vuole tracciare il grafico della funzione $y=a^x$, che, come sappiamo dal paragrafo precedente, deve avere base positiva. Se utilizziamo delle tabelline per costruire il grafico per punti, scopriamo il seguente andamento:



Osserviamo le seguenti importanti proprietà generali:

- la funzione $y=a^x$ è crescente per $a>1$
- la funzione $y=a^x$ è decrescente per a compreso tra 0 e 1 (cioè $0<a<1$)
- la funzione $y=a^x$ ha il grafico che attraversa il punto (0, 1), qualunque sia il valore di a (purché, come deve essere, positivo)
- la funzione $y=a^x$ assume sempre valori positivi e il suo grafico si trova tutto sul semipiano superiore (quadranti I e II)