PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

Danilo Saccoccioni

Tra le numerosissime proprietà dei triangoli che si potrebbero studiare, meritano sicuramente attenzione per la loro suggestività quelle relative ai punti di intersezione dei tre assi di simmetria dei lati, delle tre altezze, delle tre bisettrici e delle tre mediane.

Dato un triangolo qualsiasi, i tre assi di simmetria dei lati si incontrano in uno stesso punto, chiamato **circocentro**; *il nome è dovuto al fatto che il circocentro è il centro di una circonferenza alla quale appartengono i tre vertici del triangolo.*

Ci apprestiamo a dimostrare, ora, il teorema appena enunciato; esso asserisce, in sostanza, una proprietà che non è affatto scontata: perché mai, infatti i tre assi di simmetria dovrebbero incontrarsi tutti *in uno stesso punto*?

Facciamo riferimento alla figura seguente:

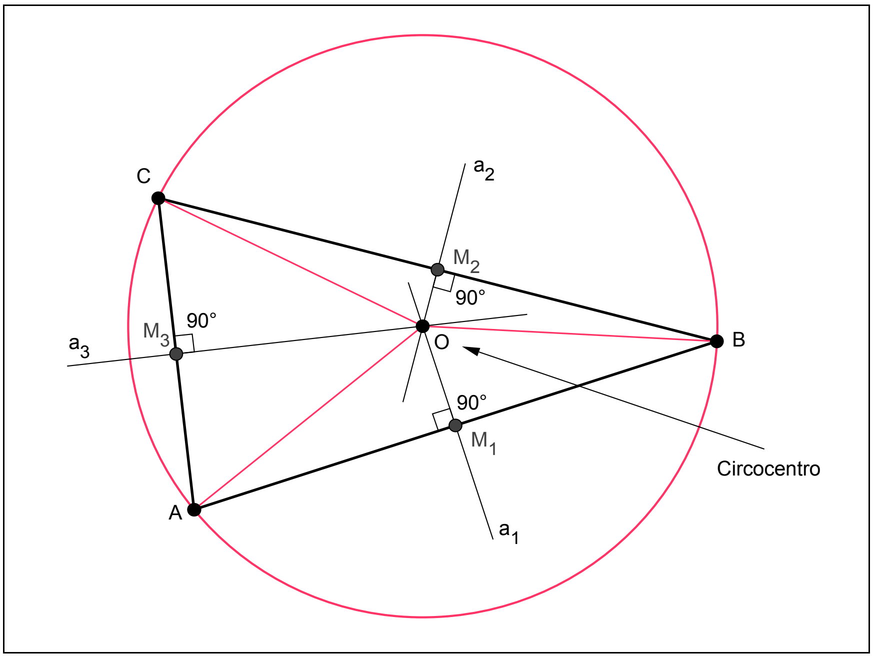

Figura 1. Dato il triangolo ABC, gli assi di simmetria a_1, a_2 e a_3 dei lati AB, BC e AC si incontrano in uno stesso punto O chiamato *circocentro*, che risulta essere anche il centro di una circonferenza passante per i tre vertici A, B e C del triangolo; M_1, M_2 e M_3 sono i punti medi dei lati.

L'unica ipotesi del teorema è che ABC sia un triangolo, senza ulteriori specificazioni. Costruiamo i due assi a_1 e a_2 e chiamiamo O il loro punto di intersezione; se riusciamo a far vedere che O appartiene anche all'asse a_3, il teorema sarà dimostrato. A tal proposito, ricordiamo una proprietà dell'asse di simmetria di un segmento: *ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi di quest'ultimo*; pertanto, poiché O è per costruzione il punto di intersezione di a_1 e a_2, esso appartiene sia ad a_1 che ad a_2, dunque:

$\overline{AO}=\overline{BO}$, poiché O è equidistante da A e da B;

$\overline{BO}=\overline{CO}$, poiché O è equidistante da B e da C.

Dalle due uguaglianze precedenti risulta $\overline{AO}=\overline{CO}$, cioè, ricordando un'altra proprietà dell'asse di un segmento (*se un punto del piano è equidistante dagli estremi di un segmento allora esso appartiene all'asse di simmetria di quest'ultimo*), risulta che O appartiene ad a_3.

L'ultima parte del teorema, cioè che O è il centro di una circonferenza cui appartengono i tre vertici del triangolo, si dimostra immediatamente considerando che $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ e che una circonferenza è proprio l'insieme dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro.

Il teorema appena dimostrato ammette il seguente corollario:

- *Per tre punti non allineati del piano passa una e una sola circonferenza.*

Quanto visto fornisce anche un metodo costruttivo per tracciare con riga e compasso una circonferenza passante per tre punti A, B e C non allineati del piano: è sufficiente costruire gli assi di simmetria di due segmenti aventi per estremi A, B e C e puntare il compasso sull'intersezione di tali assi con apertura fino ad uno qualsiasi dei tre punti assegnati.

Dato un triangolo qualsiasi, le altezze relative ai tre vertici si incontrano in uno stesso punto, chiamato **ortocentro***.*

Per la dimostrazione facciamo riferimento alla figura 2:

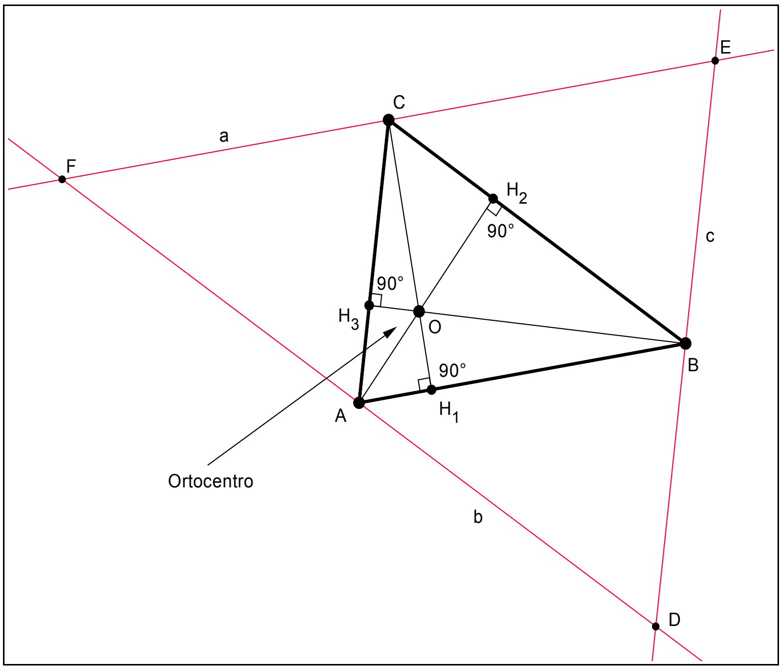

Figura 2. L'ortocentro del triangolo ABC corrisponde al circocentro del triangolo DEF costruito conducendo le parallele ai lati AB, BC e AC per i vertici ad essi opposti.

A partire dal triangolo ABC, conduciamo le rette a, b e c rispettivamente parallele ai lati AB, BC e AC. Si nota agevolmente che A, B e C sono i punti medi dei segmenti DF, ED e FE; infatti, considerando per esempio il punto A, si ha che AD è congruente ad AF, poiché BC è il lato opposto sia del lato AD che del lato AF rispetto ai parallelogrammi ADBC e ABCF (si ricordi la proprietà fondamentale: *in un parallelogramma i lati opposti sono congruenti*). A questo punto è sufficiente osservare che O è il circocentro del triangolo DEF, poiché le altezze dei tre lati di ABC non sono altro che gli assi di simmetria di DF, ED e FE.

Dato un triangolo qualsiasi, le mediane relative ai tre vertici si incontrano in uno stesso punto, chiamato **baricentro***; esso divide ciascuna mediana in due parti, in modo che una sia il doppio dell'altra.*

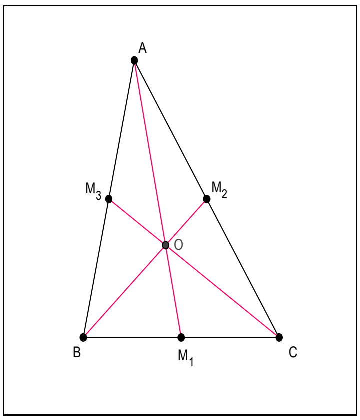

Figura 3. Baricentro di un triangolo.

La dimostrazione di questo teorema è un po' più articolata, ma vale la pena affrontarla per conoscere bene le proprietà del baricentro, importante in fisica.

Facendo riferimento alla figura 4, chiamiamo O il punto di intersezione delle due mediane BM_2 e CM_3 e tracciamo il segmento M_2M_3, il quale risulta parallelo a BC e di lunghezza pari alla metà questo (conseguenza del teorema del fascio di parallele). Consideriamo, ora, il triangolo OBC e chiamiamo D ed E i punti medi dei lati BO e CO; anche il segmento DE è parallelo a BC e di lunghezza pari alla metà dello stesso, pertanto $M_2M_3 \| DE$ e $\overline{M_2M_3} = \overline{DE}$, quindi DEM_2M_3 è un parallelogramma e DO è congruente a OM_2 (le diagonali di un parallelogramma si bisecano fra loro). Abbiamo dunque dimostrato che BO è il doppio di OM_2 (analogamente CO è il doppio di OM_3) e rimane da dimostrare che O appartiene anche ad AM_1; a tal fine osserviamo che se il punto di intersezione fra AM_1 e BM_2 fosse diverso da O, BM_2 non risulterebbe più diviso in due parti tali che una sia il doppio dell'altra, come invece deve essere per quanto visto in precedenza a proposito dell'intersezione di due mediane.

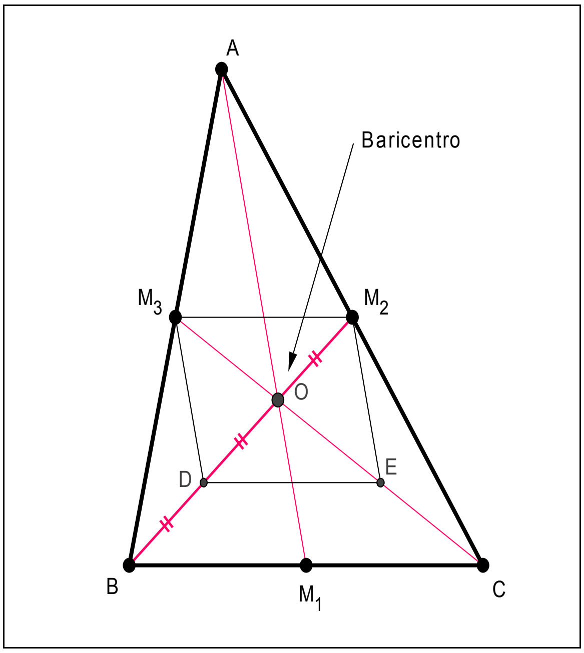

Figura 4. Costruzione impiegata per dimostrare che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti, una doppia dell'altra.

In un triangolo qualsiasi, le bisettrici relative ai tre vertici si incontrano in uno stesso punto, chiamato **incentro***; esso è il centro della circonferenza inscritta al triangolo, con raggio pari al rapporto tra l'area e il semiperimetro del triangolo stesso.*

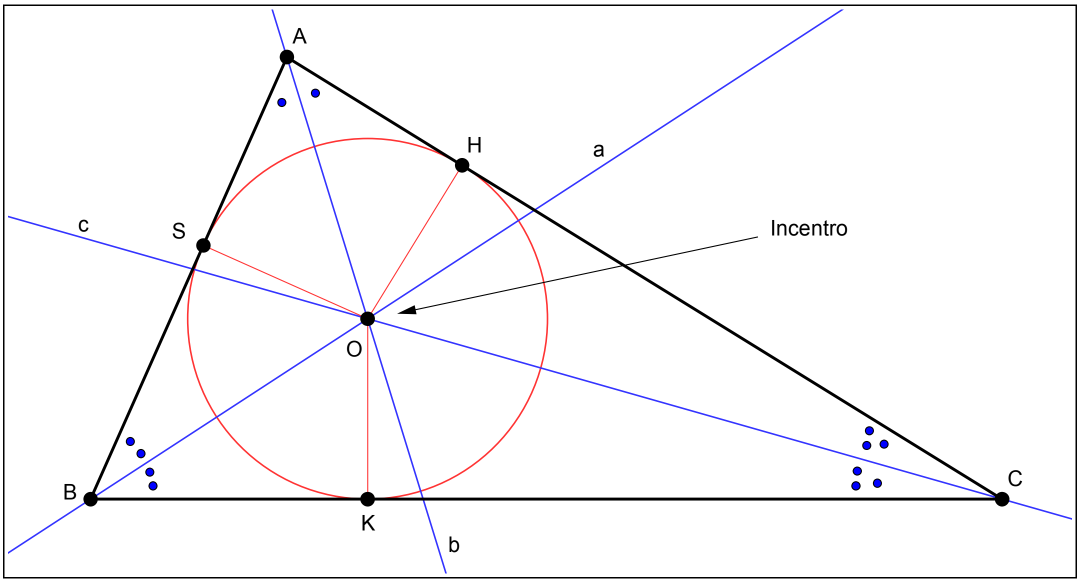

Figura 5. Costruzione dell'incentro di un triangolo; in rosso sono indicati la circonferenza inscritta e i raggi perpendicolari ai lati del triangolo nei punti di tangenza.

Facendo riferimento alla figura 5, consideriamo le due bisettrici a e b e chiamiamo O il loro punto di intersezione. Poiché ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante dai lati di quest'ultimo, avremo $\overline{OS}=\overline{OK}$ e $\overline{OS}=\overline{OH}$, da cui si ottiene $\overline{OH}=\overline{OK}$; quest'ultima relazione è sufficiente per affermare che O appartiene alla bisettrice C (perché ogni punto equidistante dai lati di un angolo appartiene alla sua bisettrice). La seconda parte del teorema si dimostra calcolando l'area del triangolo ABC nel seguente modo:

$$\text{Area}(ABC)=\text{Area}(ABO)+\text{Area}(BCO)+\text{Area}(ACO)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OS}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OK}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OH}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}) \quad ,$$

dove r è il raggio della circonferenza inscritta; quindi

$\text{Area}(ABC)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=r\cdot s$, essendo s il semiperimetro di ABC, ovvero $s=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})$.

In definitiva:

$$r=\frac{\text{Area}(ABC)}{s}$$