RADICI *N*-ESIME DI NUMERI POSITIVI

Danilo Saccoccioni

In questa dispensa ci occupiamo di illustrare le proprietà fondamentali dei radicali, poiché esse sono necessarie per sviluppare il calcolo e costituiscono prerequisito di altri argomenti di matematica. Iniziamo subito col ricordare la definizione di *radice n-esima di un numero positivo*, basata sul seguente importante teorema:

TEOREMA 1

Dati un numero reale positivo a e un numero intero $n \geqslant 2$ *, l'equazione* $x^n = a$ *ammette una e una sola soluzione positiva.*

Si badi che, nelle ipotesi viste, l'equazione $x^n = a$ può ammettere anche soluzioni negative, ma il teorema appena enunciato ci assicura che esiste sempre un'unica soluzione positiva. Vediamo degli esempi:

- L'equazione $x^2 = 4$ ammette due soluzioni, +2 e -2, ma una sola di esse è positiva.
- L'equazione $x^3 = 27$ ammette una sola soluzione, +3; non sono ammesse soluzioni negative, come è facile rendersi conto (esponente dispari).
- L'equazione $x^5 = 100000$ ammette una sola soluzione, +10; non sono ammesse soluzioni negative, come è facile rendersi conto (esponente dispari).

Dobbiamo rinunciare ad una dimostrazione generale del teorema precedente, in quanto sarebbero necessarie nozioni che vanno al di là delle conoscenze liceali. In ogni caso il teorema permette di formulare la seguente

DEFINIZIONE

Dati un numero reale positivo a e un numero intero $n \geqslant 2$ *, l'unica soluzione positiva dell'equazione* $x^n = a$ *si chiama radice n-esima del numero a e viene denotata con il simbolo* $\sqrt[n]{a}$.

- L'unica soluzione positiva dell'equazione $x^2 = 4$ è chiamata radice quadrata di 4; possiamo dunque scrivere: $x = \sqrt[2]{4} = +2$, poiché $(+2)^2 = 4$
- L'unica soluzione positiva dell'equazione $x^3 = 27$ è chiamata radice cubica di 27; possiamo dunque scrivere: $x = \sqrt[3]{27} = +3$, poiché $(+3)^3 = 27$
- L'unica soluzione positiva dell'equazione $x^5 = 100000$ è chiamata radice quinta di 100000; possiamo dunque scrivere: $x = \sqrt[5]{100000} = +10$, poiché $(+10)^5 = 100000$

In poche parole, <u>la radice *n*-esima di un numero positivo *a* è quell'unico numero positivo che, elevato alla *n*, dà come risultato *a*</u>.

Consideriamo, ora, il simbolo $\sqrt[n]{a}$:

- ✔ *n* viene chiamato *indice della radice*;
- ✔ *a* viene chiamato *radicando*;
- ✔ $\sqrt[n]{a}$ viene chiamato *radicale* oppure, come abbiamo visto, *radice n-esima di a*.

Spesso le radici quadrate vengono scritte omettendo l'indice 2, per esempio: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16}$.

Si noti che, per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione $x^n = 0$ ammette come unica soluzione $x = 0$, pertanto possiamo estendere la definizione di radice anche al caso di radicando che vale 0: $\sqrt[n]{0} = 0$.
Inoltre, poiché $1^n = 1$, avremo $\sqrt[n]{1} = 1$.

Nelle pagine seguenti presentiamo l'enunciato e la dimostrazione delle principali proprietà dei radicali. E' necessario rendersi conto che tali proprietà sono fondamentali per ampliare il calcolo algebrico elementare appreso al ginnasio.

TEOREMA 2

Sussistono le seguenti fondamentali proprietà (valide, ovviamente, con radicandi positivi e indici interi maggiori di 1):

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$
3. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ — ***Proprietà invariantiva dei radicali***
4. $\sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ — ***Radice di un prodotto***
5. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ — ***Radice di un rapporto***
6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ — ***Potenza di una radice***
7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$ — ***Radice di un radicale***

Di seguito ci apprestiamo a dimostrare la validità di tutte le sette proprietà appena elencate, corredando la trattazione con opportuni esempi:

PROPRIETA' 1

La proprietà afferma, in sostanza, che è possibile semplificare l'indice con l'esponente, come mostra l'esempio:

- $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = \left(\sqrt[\cancel{3}]{7}\right)^{\cancel{3}} = 7$

La dimostrazione scaturisce immediatamente dalla definizione di radice; infatti, l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^n = a$ è stata indicata con $\sqrt[n]{a}$; sostituendo, pertanto, la soluzione $\sqrt[n]{a}$ al posto dell'incognita x si ottiene l'identità: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

PROPRIETA' 2

La proprietà è simile alla precedente; vediamo alcuni esempi applicativi:

- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} = 2$; il penultimo passaggio mostra la semplificazione dell'indice con l'esponente.

- $\sqrt[2]{\frac{0{,}0001\cdot 64}{9}}$ = scomporre in fattori = $\sqrt[2]{\frac{10^{-4}\cdot 2^6}{3^2}}$ = ridurre allo stesso esponente =

$$= \sqrt[2]{\left(\frac{10^{-2}\cdot 2^3}{3}\right)^2} = \frac{10^{-2}\cdot 2^3}{3} = \frac{8}{10^2\cdot 3} = \frac{8}{300} = \frac{2}{75}$$

Per dimostrare la proprietà, partiamo dall'equazione $x^n = a^n$; è immediato rendersi conto che l'unica soluzione positiva risulta essere $x = a$; tuttavia, dalla definizione di radice, la soluzione può anche essere espressa come radicale:

$x^n = a^n \quad\rightarrow\quad x = \sqrt[n]{a^n}$

Dunque, poiché $x = a$ e $x = \sqrt[n]{a^n}$, otteniamo subito $\sqrt[n]{a^n} = a$.

PROPRIETA' 3 **Proprietà invariantiva dei radicali**

Anche questa proprietà è molto importante per semplificare esponenti ed indici:

- $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3} = \sqrt[2\cdot\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} = \sqrt[2]{2}$
- $\sqrt[8]{81} = \sqrt[2\cdot 4]{3^4} = \sqrt[2]{3}$
- $\sqrt[6]{256} = \sqrt[2\cdot 3]{2^8} = \sqrt[\cancel{2}\cdot 3]{2^{\cancel{2}\cdot 4}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

Per la dimostrazione, scriviamo la potenza $a^{m\cdot p}$ in forma opportuna:

$a^{m\cdot p} = (a^m)^p = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\cdot p}$,

dunque $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\cdot p} = a^{m\cdot p}$, cioè abbiamo ottenuto una base che, elevata alla potenza $n\cdot p$, fornisce $a^{m\cdot p}$, quindi la base si ottiene estraendo la radice di indice $n\cdot p$: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$.

PROPRIETA' 4 **Radice di un prodotto**

La proprietà è importante perché ci permette di "spezzare" o "riunire" radicali, come mostrano gli esempi:

- $\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4\cdot 5} = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}$

- $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{21}$

La dimostrazione si ottiene facilmente ponendo $p=\sqrt[n]{x}$ e $q=\sqrt[n]{y}$, da cui si ottiene $x=p^n$ e $y=q^n$; se ora si valuta il prodotto $x\cdot y$, si ottiene:

$$x\cdot y=p^n\cdot q^n=(p\cdot q)^n$$

e quindi, dall'uguaglianza fra primo e ultimo membro, $p\cdot q=\sqrt[n]{x\cdot y}$, cioè, sostituendo al posto di *p* e *q* rispettivamente $\sqrt[n]{x}$ e $\sqrt[n]{y}$:

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y} \quad .$$

Si osservi che il nucleo della dimostrazione è l'applicazione di una delle proprietà delle potenze.

PROPRIETA' 5 **Radice di un rapporto**

La dimostrazione è in tutto simile a quella della proprietà 4, ma, anziché valutare il prodotto $x\cdot y$, si deve valutare il quoziente:

$\frac{x}{y}=\frac{p^n}{q^n}=\left(\frac{p}{q}\right)^n$, quindi $\frac{p}{q}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, cioè, sostituendo al posto di *p* e *q* rispettivamente $\sqrt[n]{x}$ e $\sqrt[n]{y}$:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad .$$

PROPRIETA' 6 **Potenza di una radice**

Esempio:

- $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5=\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[3]{32}$

La dimostrazione consiste in una semplice applicazione della proprietà 4 (già dimostrata):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\sqrt[n]{a}}_{m\, volte}=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\, volte}}=\sqrt[n]{a^m}$$

PROPRIETA' 7 **Radice di un radicale**

Esempio:

- $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2\cdot 3]{5}=\sqrt[6]{5}$

La dimostrazione utilizza le proprietà 3 e 6, già dimostrate:

$$\sqrt[n]{a}\ =\ applichiamo\, la\ proprietà\ 3\ =\ \sqrt[m\cdot n]{a^m}\ =\ applichiamo\, la\ proprietà\ 6\ =\ \left(\sqrt[m\cdot n]{a}\right)^m \quad ,$$

cioè, riscrivendo l'uguaglianza fra primo e ultimo membro: $\sqrt[n]{a}=\left(\sqrt[m\cdot n]{a}\right)^m$,

quindi $\sqrt[m\cdot n]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.