Radicando negativo e dominio di un radicale

Se osserviamo la scrittura $2^3 = 8$, sappiamo che 2 è l'unico numero positivo che elevato alla 3 dà 8. Dunque $2 = \sqrt[3]{8}$.
Anzi ci accorgiamo che non esiste neppure un numero negativo che elevato alla 3 dà 8.

Osserviamo ora quest'altra scrittura: $(-2)^3 = -8$. Finora non ci siamo mai occupati di radici con radicandi negativi, ma poiché osserviamo che -2 è l'unico numero (fra tutti i reali positivi e negativi) che elevato alla 3 dà -8, viene naturale scrivere: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Se però l'indice della radice fosse pari, ad esempio 4, come nel caso di $\sqrt[4]{-16}$, ci accorgiamo che a tale simbolo non possiamo attribuire alcun valore numerico reale, perché nessun numero reale elevato alla 4 (che è PARI) darà mai -16, che è negativo.

Ricapitolando:

$\sqrt[n]{A}$

- se **n è pari** ha significato solo se $\boxed{A \geq 0}$.
- se **n è dispari** ha sempre significato, per **qualsiasi numero reale *A*** (positivo o negativo).

Calcola per esercizio: $\sqrt[3]{-1}$ $\quad \sqrt[3]{-27}$ $\quad \sqrt[7]{-128}$ $\quad \sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$ $\quad \dfrac{\left(\sqrt[4]{3} - 8\right)}{2 - 5 \cdot \sqrt[3]{-7}}$ (con la calcolatrice, 4 cifre sign.)

Cercare il dominio di un radicale significa determinare tutti i valori delle variabili che rendono sensato il radicale nei numeri reali.

<u>**Esempio 1**</u>

Dato il radicale: $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-4} - 3}$ poiché l'indice è pari, il dominio sarà dato dalle soluzioni della disequazione: $\dfrac{x+2}{x-4} - 3 \geq 0$ (Risolvere per esercizio!)

<u>**Esempio 2**</u>

Dato il radicale: $\sqrt[9]{\dfrac{x+2}{x-4} - 3}$ poiché l'indice è dispari, il radicando può assumere qualsiasi valore e il dominio sarà costituito dalle sole condizioni di esistenza per il denominatore: $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{4\}$

<u>**Esempio 3**</u>

Data l'espressione: $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-4} - 3} + \sqrt{x-5} \cdot \sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x^2 - 36}}$ è chiaro che dovranno essere verificate <u>contemporaneamente</u> diverse condizioni: quelle di tutti i radicandi di indice pari e quelle relative ai denominatori, pertanto il dominio è dato dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-4} - 3 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 36 \neq 0 \end{cases}$$

Risolvere per esercizio: $\text{Dominio} = [5,7] - \{6\}$

PROPRIETA' DELLE RADICI – OSSERVAZIONI MOLTO IMPORTANTI

- ***Talvolta*** *le proprietà delle radici studiate (invariantiva ecc…) non valgono se applicate direttamente a radicandi negativi*, come mostra il seguente esempio:
  - <u>Passaggi errati</u>: $-2 = \sqrt[3]{(-2)^3} =$ (per la propr. invariant.) $\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = +2$

  Tentando di applicare la proprietà invariantiva siamo giunti **all'assurdo** che – 2 = +2; dunque la proprietà invariantiva talvolta non si può applicare al modo visto ad una base negativa come – 2; vediamo come va applicata:
  - <u>Passaggi corretti</u>: $-2 = \sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-2^3} = -\sqrt[3]{2^3} =$ (per la propr. invariant.) $-\sqrt[6]{2^6} = -\sqrt[6]{64} = -2$

  L'esempio mostra che **per applicare correttamente le proprietà delle radici <u>con radicandi negativi e indici dispari</u> conviene prima evidenziare il segno "–" e trasportarlo fuori della radice, in modo che dentro la radice rimanga un radicando positivo**, che sappiamo trattare come abbiamo sempre fatto. Esempio: $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt[6]{5^2 \cdot 7^3}$
- In ogni caso, <u>**ciò che si può sempre fare per evitare problemi, è lavorare opportunamente con i moduli**</u>, tenendo presente quanto detto sul dominio per indici pari o dispari. Esempi:
  - $\sqrt[2]{x^2} = |x|$ (ma: $\sqrt[3]{x^3} = x$ perché l'indice è dispari e il segno non dà problemi, almeno finché non si applicano le proprietà, come già detto);
  - Trasporto fuori: $\sqrt[4]{3^8 a^4 (1-a)} = 3^2 |a| \cdot \sqrt[4]{1-a}$.