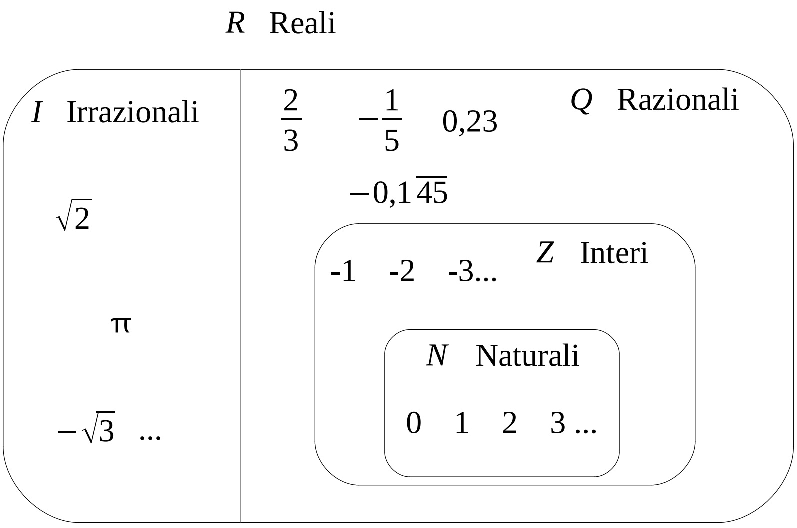
Prof. Danilo Saccoccioni

PER UN RIPASSO DI ALGEBRA...

1. **CLASSIFICAZIONE DEI NUMERI**

   a. Numeri naturali $N=\{0,1,2,3,4...\}$
   b. Numeri interi relativi $Z=\{0,1,-1,2,-2,3,-3...\}$ Ovviamente N è sottoinsieme di Z
   c. Numeri razionali $Q=\{\,frazioni\ positive\ e\ negative\ di\ interi\ ,\ è\ compreso\ lo\ zero\}$, cioè decimali limitati e decimali illimitati periodici.
   Ovviamente N e Z sono sottoinsiemi di Q.
   d. Numeri irrazionali $I=\{decimali\ illimitati\ aperiodici\}$
   Ovviamente Q ed I non hanno elementi in comune. Lo zero è in Q.
   e. Numeri reali $R=Q\cup I$
   I numeri reali godono della **proprietà di continuità**:
   Esiste una corrispondenza biunivoca fra numeri reali e punti di una retta
   Tale proprietà viene sfruttata per definire la retta cartesiana, il piano cartesiano, lo spazio cartesiano ecc...
   Possiamo rappresentare con un diagramma la situazione complessiva, riportando anche esempi numerici:



2. **Scomposizione in fattori di polinomi** (nei numeri reali):
   a. Raccoglimento a fattor comune totale
   b. Raccoglimento a fattor comune parziale
   c. Riconoscimento di prodotti notevoli
   d. Riconoscimento di un trinomio speciale (o caratteristico), per es. $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
   e. Applicazione del teorema di Ruffini
   f. Metodo del discriminante Δ per polinomi di II grado del tipo ax^2+bx+c :
      A. se Δ < 0 il polinomio non si scompone;
      B. se Δ = 0 il polinomio si scompone così: $ax^2+bx+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
      C. se Δ > 0 il polinomio si scompone così: $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, dove $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

   La dimostrazione del procedimento deriva da un calcolo diretto.

3. **Equazioni di grado superiore al primo**
   a. Nel **caso generale**, dopo aver portato tutto al I membro (e semplificato eventuali denominatori), si tenta di scomporre in fattori e si individuano le radici del polinomio corrispondente.
   Per es. $x^3+1=(x+1)^2$, ora svolgiamo il prodotto notevole e portiamo tutto al primo membro:
   $x^3-x^2-2x=0$, scomponiamo in fattori:
   $x\cdot(x+1)\cdot(x-2)=0$ le cui soluzioni sono palesemente $x_1=0$, $x_2=-1$ e $x_3=+2$
   b. Nel caso di **equazioni di secondo grado**:
      A. si può applicare il solito metodo del discriminante Δ
      B. si può tentare di scomporre il trinomio come illustrato nel punto precedente.

4. **Equazioni fratte**. Ricordarsi delle condizioni di esistenza, dopodiché è sufficiente calcolare il minimo comune denominatore, semplificare i denominatori e ricondursi così ad un'equazione come nel punto 3. Alla fine occorre discutere quali soluzioni siano accettabili.

5. **Disequazioni fratte**
   a. Nel caso generale si applica il noto metodo grafico associato al prodotto dei segni. (Vedere: http://www.danilo.saccoccioni.name/mat/disequazioni.pdf)
   b. Nel caso di disequazioni di secondo grado
      A. si può applicare il metodo della parabola
      B. si può ovviamente applicare anche il metodo grafico dopo aver scomposto in fattori il trinomio di secondo grado.

6. **Sistemi di equazioni di I grado** (In Matematica "sistema" significa "ricerca delle soluzioni comuni")
   a. Metodo di sostituzione
   b. Metodo di confronto
   c. Metodo di riduzione
   d. Metodo di Cramer
   e. Metodo grafico (tale metodo è in genere ovviamente approssimato)

7. **Equazioni binomie, trinomie, reciproche, sistemi misti (con equazioni di grado superiore al I** e / o **con più di due equazioni di I grado), sistemi simmetrici, sistemi omogenei, disequazioni binomie e trinomie.**
   Vedere il vecchio libro di algebra. Nel caso generale i sistemi si risolvono per sostituzione con più passaggi, svolgendo i calcoli in modo oculato.

   a. *Equazioni reciproche*, di vario tipo, per es.
      A. $3x^3-13x^2+13x-3=0$ (coefficienti equidistanti dagli estremi opposti) → Ruffini (una radice è 1)
      B. $2x^3-3x^2-3x+2=0$ (coefficienti equidistanti dagli estremi uguali) → Ruffini (una radice è - 1)
      C. $12x^4-25x^3+25x-12=0$ (coefficienti equidistanti dagli estremi opposti) → Ruffini (una radice è 1 e una - 1)
      D. $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$ (coefficienti equidistanti dagli estremi uguali)
         Il caso D si risolve dividendo tutto per x^2 e raccogliendo nel seguente modo: $12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$; si opera la sostituzione $t=x+\frac{1}{x}$ e si tiene presente che $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$; una volta effettuate le sostituzione è facile completare il procedimento.

   b. *Equazioni binomie*, del tipo $x^n=k$, k numero reale
      A. Se n è pari e k positivo: $x=\pm\sqrt[n]{k}$ (due soluzioni opposte)
      B. Se n è pari e k negativo: nessuna soluzione
      C. Se n è dispari e k qualsiasi: una sola soluzione, ovvero $x=\sqrt[n]{k}$

   c. *Equazioni trinomie*, del tipo $ax^{2n}+bx^n+c=0$; per la risoluzione si può procedere come al solito per scomposizione oppure si opera la sostituzione $t=x^n$, il resto è noto.

   d. *Disequazioni binomie*, del tipo $x^n>k$ oppure $x^n<k$. Occorre distinguere
      A. Se n è pari e k positivo:
         1. $x^n>k$ equivale a $x<-\sqrt[n]{k}$ vel $x>\sqrt[n]{k}$
         2. $x^n<k$ equivale a $-\sqrt[n]{k}<x<\sqrt[n]{k}$
      B. Se n è dispari e k qualsiasi:
         1. $x^n>k$ equivale a $x>\sqrt[n]{k}$
         2. $x^n<k$ equivale a $x<\sqrt[n]{k}$

   e. *Disequazioni trinomie*, del tipo $ax^{2n}+bx^n+c>0$ (o minore di zero); per la risoluzione si può procedere come al solito per scomposizione oppure si opera la sostituzione $t=x^n$, il resto è noto.

   f. *Sistemi simmetrici*, che cioè rimangono invariati sostituendo x con y.
      A. Di II grado del tipo, per es. $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=24 \end{cases}$ per sostituzione si giunge ad un'equazione di II grado
      B. Di grado superiore; per la risoluzione è spesso utile ricordare le identità:
         1. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
         2. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

   g. *Sistemi omogenei*, del tipo: $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$
      Per la risoluzione si introduce una nuova variabile t attraverso la sostituzione $y=tx$, dopodiché si esegue la divisione membro a membro delle due equazioni (oppure nel caso in cui $d=d'=0$ si applica la legge di annullamento del prodotto...).

8. **Sistemi di disequazioni** (con una sola incognita)
Si risolvono **separatamente** (cioè indipendentemente) le singole disequazioni, poi conviene generalmente applicare un metodo grafico per determinare le **soluzioni comuni a tutte** le disequazioni.

9. **Equazioni e disequazioni con i moduli** (o valori assoluti)
Si deve studiare il segno di ciascuna espressione all'interno dei vari moduli, costruire una tabella o grafico con la distribuzione dei segni, risolvere l'equazione o disequazione che si ottiene in ciascuno degli intervalli individuati, infine considerare l'unione di tutte le soluzioni.
Sono molto frequenti i seguenti casi, che capitano spesso nello studio dell'Analisi Matematica:
   1. $|f(x)|=k$ (con $k > 0$) è equivalente a $f(x)=k$ vel $f(x)=-k$
   2. $|f(x)|<k$ (con $k > 0$) è equivalente a $\begin{cases} f(x)>-k \\ f(x)<k \end{cases}$
   3. $|f(x)|>k$ (con $k > 0$) è equivalente a $f(x)>k$ vel $f(x)<-k$

10. **Equazioni irrazionali**
In genere si cerca di elevare ad una potenza entrambi i membri, tenendo presente che se si eleva ad una potenza pari si deve evitare di introdurre nuove soluzioni. Casi particolari:

a. $\sqrt[n]{A(x)}=B(x)$, *n* pari equivalente a $\begin{cases} A(x)=[B(x)]^n \\ B(x)\geqslant 0 \end{cases}$
oppure si può risolvere solo $A(x)=[B(x)]^n$ verificando però alla fine quali siano effettivamente le soluzioni.

b. $\sqrt[n]{A(x)}=B(x)$, *n* dispari equivalente a $A(x)=[B(x)]^n$

c. Equazioni con più radicali; si procede isolando un radicale, elevando alla potenza corrispondente, isolando poi i radicali rimanenti e elevando e così via, facendo attenzione a non introdurre nuove soluzioni (per esempio alla fine del procedimento si potrebbe controllare quali siano le soluzioni effettive).

11. **Disequazioni irrazionali**
Valgono considerazioni simili a quelle evidenziate per le equazioni irrazionali. Casi particolari:

a. $\sqrt[n]{A(x)}>B(x)$, *n* dispari equivalente a $A(x)>[B(x)]^n$
b. $\sqrt[n]{A(x)}<B(x)$, *n* dispari equivalente a $A(x)<[B(x)]^n$

c. $\sqrt[n]{A(x)}>B(x)$, *n* pari equivalente a $\begin{cases} B(x)\geqslant 0 \\ A(x)>[B(x)]^n \end{cases}$ vel $\begin{cases} A(x)\geqslant 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$

d. $\sqrt[n]{A(x)}<B(x)$, *n* pari equivalente a $\begin{cases} A(x)\geqslant 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<[B(x)]^n \end{cases}$

Svolgere i seguenti esercizi, tenendo presenti le indicazioni fornite nei punti precedenti.

1. **Numeri**

a. Trasformare in frazioni (ridotte ai minimi termini dopo eventuale semplificazione) i seguenti numeri espressi in forma decimale (alla fine verificare con la calcolatrice): $0{,}32$ $1{,}25$ $0{,}5$ $12{,}345$ $0{,}25$ $0{,}75$ $0{,}\overline{3}$ $0{,}\overline{6}$ $12{,}\overline{8}$ $1{,}3\overline{8}$ $1{,}\overline{45}$ $12{,}345\overline{6789}$

b. Trasformare in decimale (senza calcolatrice!): $\frac{1}{2}$ $\frac{17}{6}$ $\frac{34}{9}$ $\frac{123}{10000}$

c. Come si potrebbero calcolare in forma approssimata e senza calcolatrice i seguenti numeri? $\sqrt{3}$ $\sqrt[5]{7}$ $2^{\sqrt{3}}$ $\log_2(3)$

d. Calcolare con la calcolatrice scientifica (approssimando il risultato con quattro cifre significative):
$\sqrt{65}$ $\sqrt[5]{46}$ 3^{18} $3^{1,8}$ $3^{1,\overline{8}}$ $3^{\sqrt{18}}$ π^3 $\pi^{\sqrt{\pi}}$
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ $\log_{10}(7)$ $\log_{10}(70)$ $\log_{10}(700)$ $\log_2(7)$ $\log_2(70)$ $\log_2(700)$
$\frac{7-3\cdot\sqrt[4]{19}}{2-\log_4(3)}$

e. Calcolare con la calcolatrice scientifica: $\frac{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot(-2{,}3456)\cdot10^{13}}{4{,}6\cdot10^{-3}}$

5. **Disequazioni fratte**

a. $\frac{2x+3}{x-1}\geqslant 0$; Soluzioni: $x\leqslant -\frac{3}{2}$ vel $x>1$

b. $1>\frac{1}{x}$; Soluzioni: $x<0$ vel $x>1$

c. $x^3+5x^2+6x<0$; Soluzioni: $x<-3$ vel $-2<x<0$

d. $\frac{5}{6x}-\frac{x-1}{2x^2+2x}>\frac{1}{x+1}$; Soluzioni: $x<-1$ vel $0<x<2$

8. **Sistemi di disequazioni**

$\begin{cases}\frac{x+3}{x-2}>0\\ 2x-10<0\end{cases}$; Soluzioni: $x<-3$ vel $2<x<5$

9. **Equazioni e disequazioni con i moduli**

a. $2-|x+3|=3x-8$; Soluzioni: $x=\frac{7}{4}$

b. $2-|x+3|=|3x-8|$; Soluzioni: impossibile

c. $|x-3|>7$; Soluzioni: $x<-4$ vel $x>10$

d. $|x^3-8|<0{,}1$ (IMPORTANTE!!) Soluzioni: $\sqrt[3]{7{,}9}<x<\sqrt[3]{8{,}1}$

e. $|x^2-4|<0{,}1$ (IMPORTANTE!!) Soluzioni: $-\sqrt{4{,}1}<x<\sqrt{3{,}9}$ vel $\sqrt{3{,}9}<x<\sqrt{4{,}1}$

Quale può essere l'interpretazione geometrica dei casi d ed e? (Suggerimento: rappresentare sul piano cartesiano le funzioni $y=x^3$ e $y=x^2$ ...)