

# IL TEOREMA DI TALETE

Danilo Saccoccioni

In questa breve dispensa vogliamo fornire una dimostrazione dell'importante teorema di Talete.

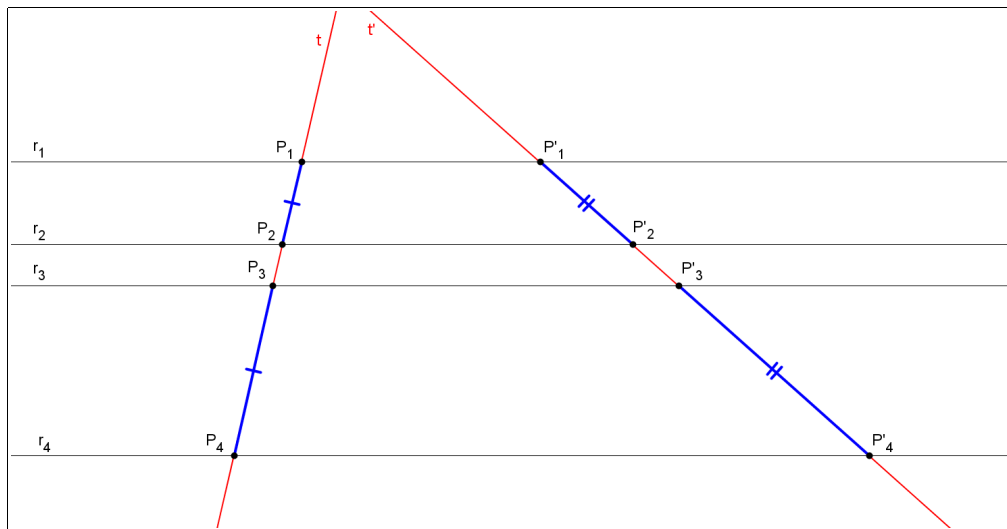
## TEOREMA DI TALETE

Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due classi di segmenti direttamente proporzionali.

La figura e la formula illustrano il significato dell'enunciato del teorema:

$$\frac{P_3 P_4}{P_1 P_2} = \frac{P_3' P_4'}{P_1' P_2'}$$

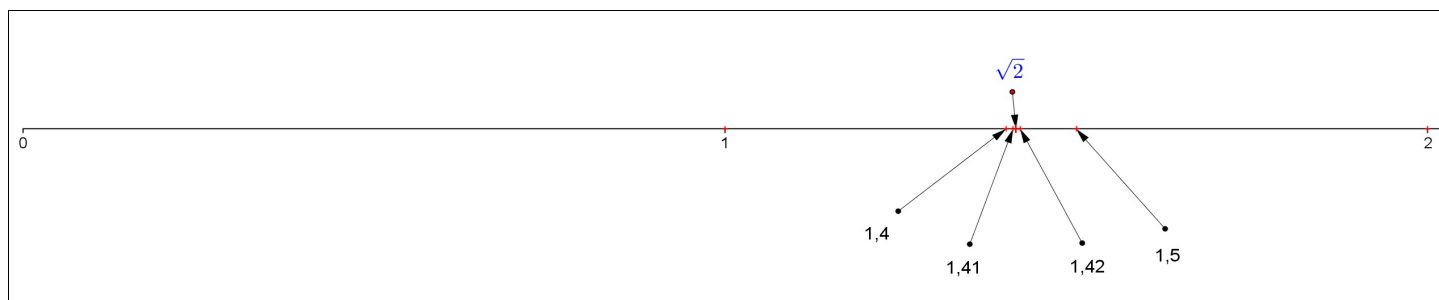
(la proporzione vale per qualsiasi quaterna di rette del fascio)



Per dimostrare il teorema dobbiamo premettere alcune considerazioni sui **numeri reali** e introdurre la **corrispondenza di Talete**.

## Proprietà dei numeri reali

Supponiamo di voler approssimare per difetto e per eccesso il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  mediante decimali limitati, con un numero crescente di cifre:



La figura precedente illustra come vengano a formarsi due classi di numeri:

- la classe  $D$  delle approssimazioni per difetto:  $D = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 \dots\}$
- la classe  $E$  delle approssimazioni per eccesso:  $E = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 \dots\}$

A mano a mano che aumenta il numero di cifre considerate, diminuisce la distanza tra i numeri che approssimano  $\sqrt{2}$ , come si può osservare anche dalla figura. Diremo che  $\sqrt{2}$  è l'unico elemento di separazione della coppia di classi contigue  $(D, E)$ .

La tecnica delle approssimazioni mediante decimali può essere estesa a qualsiasi numero reale:

## PROPRIETÀ FONDAMENTALE DEI NUMERI REALI

Ogni coppia di classi separate e contigue di numeri decimali limitati individua uno e un solo numero reale come elemento di separazione.

Viceversa, ogni numero reale è l'unico elemento di separazione di due opportune classi separate e contigue di numeri decimali limitati.

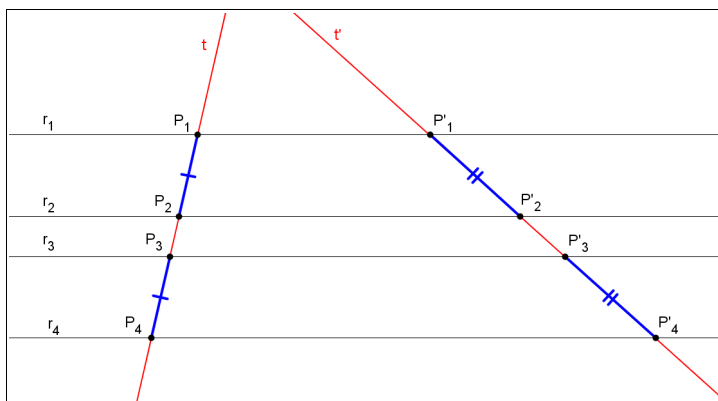
# La corrispondenza di Talete

Si tratta del seguente lemma:

## CORRISPONDENZA DI TALETE

Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su un trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale; in altri termini:

$$\text{se } P_1P_2 \simeq P_3P_4 \text{ allora } P_1'P_2' \simeq P_3'P_4'$$



## DIMOSTRAZIONE

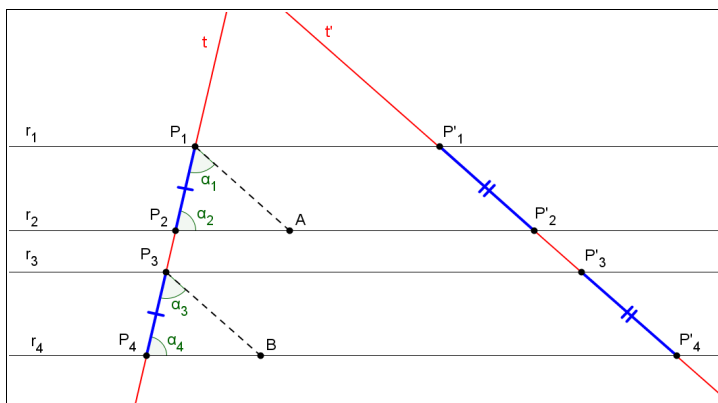
Si faccia riferimento alla figura a lato. Si costruiscono i segmenti  $P_1A$  e  $P_3B$ , entrambi paralleli alla trasversale  $t'$ . Viste le relazioni di parallelismo, valgono le seguenti corrispondenze:

- $\alpha_1 = \alpha_3$
- $\alpha_2 = \alpha_4$

Inoltre  $P_1P_2 \simeq P_3P_4$  per ipotesi, quindi i triangoli  $AP_1P_2$  e  $BP_3P_4$  sono congruenti (secondo criterio di congruenza), dunque  $P_1A \simeq P_3B$ . Ora, poiché i quadrilateri  $P_1P_1'P_2'A$  e  $P_3P_3'P_4'B$  sono parallelogrammi (per costruzione hanno i lati opposti paralleli), essi hanno i lati opposti congruenti, cioè

- $P_1A \simeq P_1'P_2'$
- $P_3B \simeq P_3'P_4'$

da cui la tesi, vista la congruenza  $P_1A \simeq P_3B$  dimostrata.



\* \* \* \*

Ora abbiamo tutti gli elementi per dimostrare il teorema di Talete:

## DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI TALETE

Riferendosi alla prima figura della prima pagina, è opportuno distinguere due casi, che sono gli unici possibili:

1. i segmenti  $P_1P_2$  e  $P_3P_4$  sono **commensurabili**, cioè hanno un sottomultiplo  $U$  comune;
2. i segmenti  $P_1P_2$  e  $P_3P_4$  sono **incommensurabili**, cioè non hanno un sottomultiplo comune.

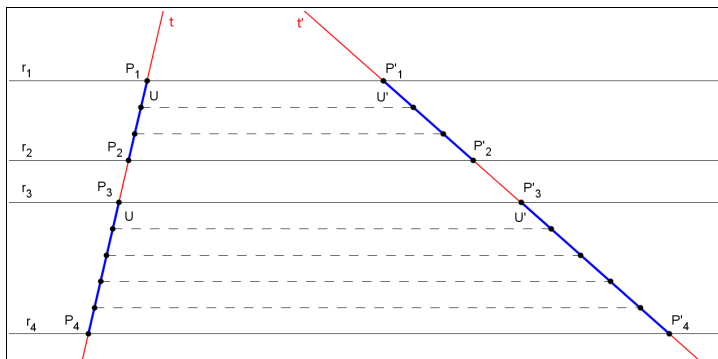
Dimostriamo il teorema prima nel caso 1, poi nel caso 2.

### CASO 1

Per ipotesi i segmenti  $P_1P_2$  e  $P_3P_4$  sono **commensurabili**, cioè hanno un sottomultiplo  $U$  comune. Ciò significa che  $P_1P_2$  può essere suddiviso in un certo numero intero  $n$  di segmenti  $U$ , mentre  $P_3P_4$  può essere suddiviso in un certo numero intero  $m$  di segmenti  $U$ . D'altra parte al segmento  $U$  sulla trasversale  $t$  corrisponde il segmento  $U'$  sulla trasversale  $t'$ , quindi per il lemma della corrispondenza di Talete avremo che:

- $P_1'P_2'$  può essere suddiviso nel numero intero  $n$  di segmenti  $U'$ ;
- $P_3'P_4'$  può essere suddiviso nel numero intero  $m$  di segmenti  $U'$ .

Ma allora il rapporto fra  $P_3'P_4'$  e  $P_1'P_2'$  è identico al rapporto fra  $P_3P_4$  e  $P_1P_2$ , cioè  $\frac{m}{n}$ . Il tutto è riassunto dalla figura a destra.



**CASO 2** (Figura in basso)

Per ipotesi i segmenti  $P_1P_2$  e  $P_3P_4$  sono **incommensurabili**, cioè non hanno un sottomultiplo comune, pertanto il rapporto fra  $P_3P_4$  e  $P_1P_2$  è un numero irrazionale, non più esprimibile come frazione di numeri interi (come accadeva nel caso 1):  $\frac{P_3P_4}{P_1P_2} = q$ , ovvero  $P_3P_4 = q \cdot P_1P_2$ , dove appunto  $q$  è numero irrazionale.

Come tutti i numeri reali, anche  $q$  può essere considerato elemento di separazione della coppia  $(D, E)$  di classi contigue formate dalle sue approssimazioni decimali per difetto e per eccesso:

- $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$  approssimazioni decimali per **difetto** di  $q$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  approssimazioni decimali per **eccesso** di  $q$

In corrispondenza di ciascuna approssimazione è possibile determinare un punto sulla trasversale  $t$  nel modo seguente:

- Per le approssimazioni **per difetto**:
  - Punto  $D_1$  tale che:  $P_3D_1 = d_1 \cdot P_1P_2$
  - Punto  $D_2$  tale che:  $P_3D_2 = d_2 \cdot P_1P_2$
  - Punto  $D_3$  tale che:  $P_3D_3 = d_3 \cdot P_1P_2$
  - e così via ...
- Per le approssimazioni **per eccesso**:
  - Punto  $E_1$  tale che:  $P_3E_1 = e_1 \cdot P_1P_2$
  - Punto  $E_2$  tale che:  $P_3E_2 = e_2 \cdot P_1P_2$
  - Punto  $E_3$  tale che:  $P_3E_3 = e_3 \cdot P_1P_2$
  - e così via ...

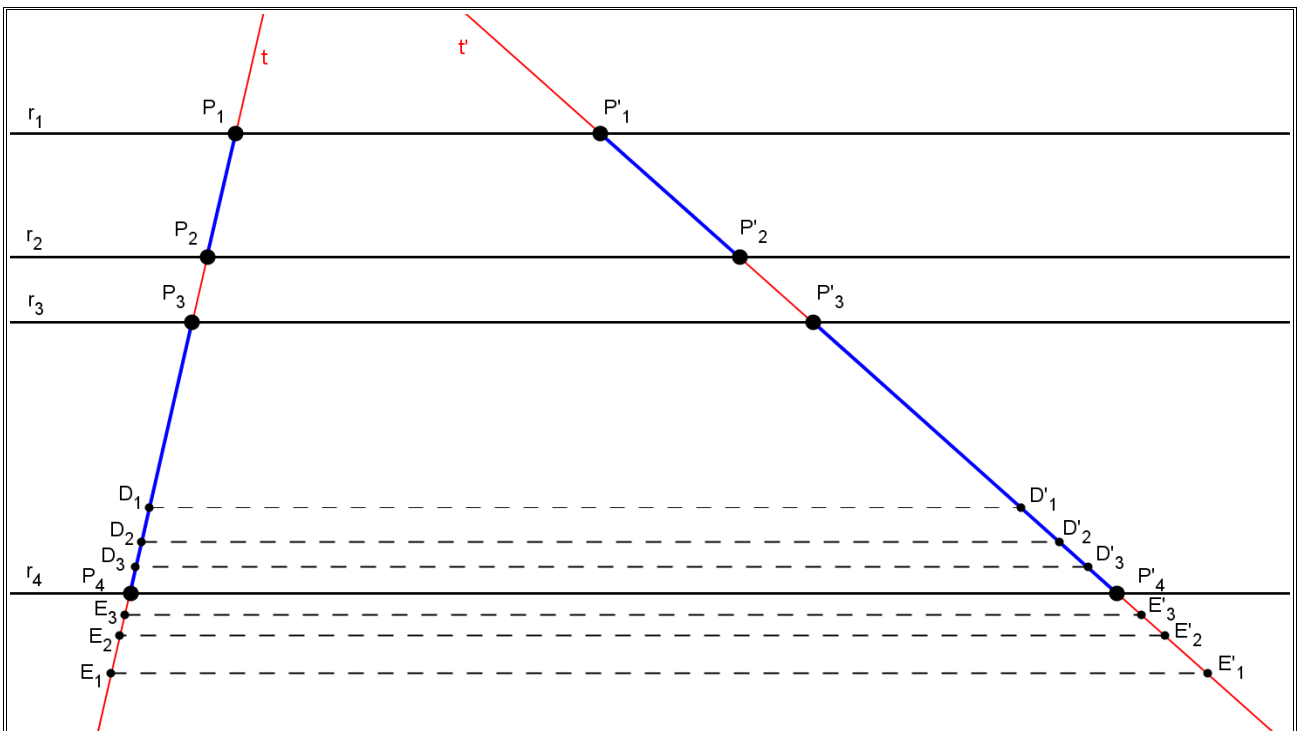
Si vengono a creare due successioni contigue di punti sulla trasversale  $t$  che hanno come elemento di separazione proprio il punto  $P_4$ . Si osservi, ora, che ciascun punto delle due successioni ha il proprio corrispondente sull'altra trasversale, ovvero  $t'$ , quindi

- Per le approssimazioni **per difetto**:
  - Al punto  $D_1$  corrisponderà  $D_1'$ , che, **per quanto dimostrato al caso 1**, ha la seguente proprietà:  $P_3'D_1' = d_1 \cdot P_1'P_2'$
  - Al punto  $D_2$  corrisponderà  $D_2'$ , che, per lo stesso motivo, ha la seguente proprietà:  $P_3'D_2' = d_2 \cdot P_1'P_2'$
  - Al punto  $D_3$  corrisponderà  $D_3'$ , che ha la seguente proprietà:  $P_3'D_3' = d_3 \cdot P_1'P_2'$
  - e così via ...
- Per le approssimazioni **per eccesso**:
  - Al punto  $E_1$  corrisponderà  $E_1'$ , che, **per quanto dimostrato al caso 1**, ha la seguente proprietà:  $P_3'E_1' = e_1 \cdot P_1'P_2'$
  - Al punto  $E_2$  corrisponderà  $E_2'$ , che, per lo stesso motivo, ha la seguente proprietà:  $P_3'E_2' = e_2 \cdot P_1'P_2'$
  - Al punto  $E_3$  corrisponderà  $E_3'$ , che ha la seguente proprietà:  $P_3'E_3' = e_3 \cdot P_1'P_2'$
  - e così via ...

Osserviamo che i punti  $\{D_1, D_2, D_3, \dots\}$  sono interni a  $P_3P_4$  e quindi  $\{D_1', D_2', D_3', \dots\}$  sono interni a  $P_3'P_4'$ ; osservazione analoga per  $\{E_1, E_2, E_3, \dots\}$  e  $\{E_1', E_2', E_3', \dots\}$ , però questa volta esterni a  $P_3P_4$  e  $P_3'P_4'$  rispettivamente.

Poiché le successioni di numeri  $\{d_1, d_2, d_3, \dots\}$  e  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  sono contigue e hanno come elemento di separazione  $q$ , possiamo asserire da quanto evidenziato in precedenza e dalle relazioni sopra riportate che

- le successioni di punti  $\{D_1', D_2', D_3', \dots\}$  e  $\{E_1', E_2', E_3', \dots\}$  sono contigue (cioè infinitamente ravvicinate) e hanno sulla trasversale  $t'$  come elemento di separazione il punto  $P_4'$ ;
- $P_3'P_4' = q \cdot P_1'P_2'$ , da cui la tesi.



1 Grazie all'assioma di partizione del piano; infatti la corrispondenza dei punti si realizza mediante rette parallele **che non si incontrano**, pertanto si rimane all'interno della stessa "fascia".