Il teorema del resto e il teorema di Ruffini

Prof. Danilo Saccoccioni

In questa breve dispensa ci occupiamo della dimostrazione di due teoremi che in algebra assumono un'importanza particolare nello sviluppo della teoria e nelle applicazioni.
Innanzitutto ricordiamo le seguenti definizioni:

Si chiama *divisione euclidea con resto di un polinomio* $N(x)$ *per un polinomio* $D(x)$ la ricerca di due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto*, tali che valgano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} N(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x) \\ gr[R(x)]\geqslant 0 \\ gr[R(x)]<gr[D(x)] \end{cases}$$

La classica divisione in colonna è un modo per determinare quoziente e resto, ma non l'unico.

Un numero a si chiama *radice* o *zero di un polinomio* $N(x)$ se annulla quest'ultimo, ovvero se $N(a)=0$.

Dati due polinomi $N(x)$ e $D(x)$, si dice che $N(x)$ è *multiplo* di $D(x)$ (oppure che $D(x)$ è *sottomultiplo* di $N(x)$) se il resto della divisione euclidea di $N(x)$ per $D(x)$ è zero; in altre parole, $N(x)$ è multiplo di $D(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $N(x)=D(x)\cdot Q(x)$.

Ora possiamo presentare il teorema del resto:

Teorema del resto

Dati un polinomio $N(x)$ e un binomio $D(x)=x+a$, il resto della divisione di $N(x)$ per $D(x)$ è il numero $R=N(-a)$.

Dimostrazione.

Poiché il divisore $D(x)$ è un polinomio di I grado e il resto deve essere sempre di grado minore del grado del divisore, necessariamente $R(x)$ deve essere di grado zero, cioè un numero che non dipende dalla variabile x; possiamo pertanto indicare $R(x)$ semplicemente con R.
Dunque risulta $N(x)=D(x)\cdot Q(x)+R=(x+a)\cdot Q(x)+R$.
La precedente è un'uguaglianza ovviamente vera per qualsiasi valore assunto dalla x; in particolare, se scegliamo $x=-a$, risulta

$$N(-a)=(-a+a)\cdot Q(-a)+R=0\cdot Q(-a)+R=R .$$

Pertanto $R=N(-a)$.

Facciamo subito un esempio applicativo del teorema del resto:

Esempio

$N(x)=2x^3-x+2 \qquad D(x)=x-3$

Svolgendo i calcoli della divisione in colonna, si ottengono rapidamente quoziente e resto:

$Q(x)=2x^2+6x+17 \qquad R=53$

Se ora si applica il teorema del resto, senza svolgere la divisione in colonna si ottiene:

$R=N(3)=2\cdot 3^3-3+2=2\cdot 27-3+2=53$

E' utile osservare che il teorema del resto permette di calcolare subito il resto di una divisione quando il divisore è di I grado e del tipo visto. Tuttavia la più importante applicazione del teorema del resto si ha con il teorema di Ruffini, che ci apprestiamo a dimostrare:

Teorema di Ruffini

Si considerino un polinomio $N(x)$ e un binomio $D(x)=x+a$. Valgono le seguenti proprietà:
(a) se $N(-a)=0$ allora $N(x)$ è multiplo di $D(x)$;
(b) viceversa, se $N(x)$ è multiplo di $D(x)$ allora $N(-a)=0$.

<u>Dimostrazione.</u>

(a) se $N(-a)=0$ allora, per il teorema del resto, $R=0$, dunque $N(x)$ è multiplo di $D(x)$;
(b) $N(x)$ è multiplo di $D(x)$, dunque $R=0$, pertanto, per il teorema del resto, $N(-a)=0$.

<u>N.B.</u> Il teorema di Ruffini fornisce una condizione necessaria e sufficiente per affermare che un polinomio $N(x)$ sia multiplo di un binomio $D(x)=x+a$: il numero $-a$ deve essere una radice di $N(x)$. Vediamo subito un esempio:

Esempio

$$N(x)=x^3-3x^2+4$$

Si verifica facilmente che il numero -1 è una radice del polinomio $N(x)$, infatti:

$$N(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=-1-3+4=0 \quad .$$

Dunque, per il teorema di Ruffini , il polinomio $N(x)$ è multiplo del binomio $D(x)=x+1$. Svolgendo la divisione in colonna si trova:

$Q(x)=x^2-4x+4$ e ovviamente $R=0$.

Pertanto: $N(x)=x^3-3x^2+4=D(x)\cdot Q(x)=(x+1)\cdot(x^2-4x+4)$.

Nel precedente esempio abbiamo ottenuto una scomposizione in fattori di $N(x)$. Tuttavia il metodo proposto non suggerisce come determinare una radice di $N(x)$. Al fine di utilizzare il teorema di Ruffini per fattorizzare i polinomi, è bene allora tenere in considerazione il seguente criterio per cercare radici razionali di un polinomio a coefficienti interi:

Criterio per la ricerca degli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi

Le eventuali radici razionali di un polinomio $N(x)$ di grado n a coefficienti interi vanno cercate fra le frazioni del tipo $\pm\frac{m}{n}$, dove m e n sono sottomultipli rispettivamente del termine noto e del coefficiente del termine di grado n di $N(x)$.

Non è difficile dimostrare il precedente criterio; in questa sede, però, ci limitiamo a presentare un esempio applicativo:

Esempio

$$N(x)=2x^2-4x-6$$

In base al criterio enunciato, i possibili zeri razionali vanno cercati fra i numeri seguenti:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$$

In particolare gli zeri effettivi sono -1 e +3, infatti:

$$N(-1)=2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-6=0$$

$$N(3)=2\cdot3^2-4\cdot3-6=0$$

Per il teorema di Ruffini, poiché 3 è uno zero di $N(x)$, quest'ultimo risulta multiplo del binomio $D(x)=x-3$; il quoziente si trova facilmente svolgendo la divisione in colonna: $Q(x)=2x+2=2(x+1)$.
Si ottiene dunque la scomposizione: $N(x)=2x^2-4x-6=D(x)\cdot Q(x)=(x-3)\cdot2(x+1)=2(x+1)(x-3)$

Dalla fattorizzazione ottenuta si osserva che effettivamente anche -1 annulla $N(x)$.